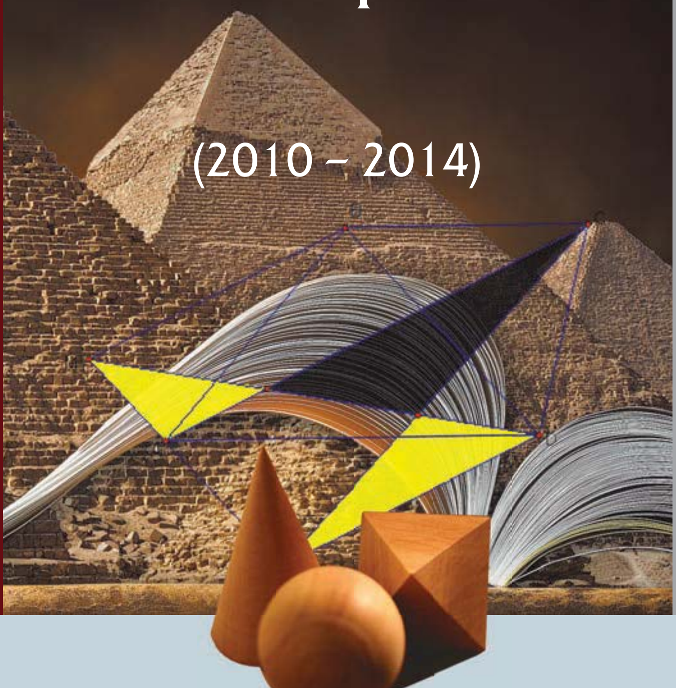
ВЫПУСК 134

Библиотечка КВАНТ

А.А. Заславский

Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина

(2010 – 2014)



БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ
ВЫПУСК
134

Приложение к журналу
«Квант» №2/2015

А.А. Заславский

Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина

(2010 – 2014)

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 514.112
ББК 22.151.0
З-36

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Заславский А.А.
З-36 **Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014).** – М.: Издательство МЦНМО, 2015. – 168 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 134. Приложение к журналу «Квант» №2/2015.)

ISBN 978-5-4439-0626-3

В книге приведены задачи геометрических олимпиад имени И.Ф. Шарыгина, прошедших в 2010 – 2014 годах. Ко всем задачам даны подробные решения.

Сборник предназначен школьникам, учителям математики и руководителям математических кружков, а также всем любителям геометрии.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-4439-0626-3

9 785443 906263 >

12+

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина проходят, начиная с 2005 года, в память об известном математике и педагоге Игоре Федоровиче Шарыгине (1937–2004). В жюри олимпиады входят профессиональные математики, школьные учителя, студенты – победители и призеры олимпиад прошлых лет. К участию в олимпиаде приглашаются ученики 8–11 классов из России, ближнего и дальнего зарубежья. Олимпиада проходит в два тура. Первый тур – заочный. Вариант из 20–25 задач (для каждой задачи указываются классы, которым она предназначена) в начале года публикуется в газете «Математика» и на интернет-порталах www.mccme.ru и www.geometry.ru. Варианты публикуются на русском и английском языках. Решения можно присылать как по электронной, так и по обычной почте, крайний срок, как правило, – начало апреля. Иностранные участники могут присылать решения на английском языке. По результатам заочного тура жюри определяет победителей, которые приглашаются на финальный тур, проходящий в Дубне (Московская область) в конце июля. Кроме того, к участию в финальном туре допускаются победители региональных геометрических олимпиад, проходящих в ряде городов России, Украины и Казахстана. Финальный тур проводится в два дня. Каждый день участники решают по 4 задачи. Решение каждой задачи школьник должен защитить сам, объясняя его (устно) членам жюри. Для каждого класса варианты финального тура составляются отдельно. Как правило, в каждом классе находятся 1–2 человека, решившие все задачи. Во время финального тура для ребят и их родителей и учителей организуются популярные лекции по геометрии, которые читают профессора МГУ, а также культурная и спортивная программа.

В этой книге содержатся условия и решения задач VI–X олимпиад, проведенных в 2010–2014 гг. Условия и решения задач первых пяти олимпиад можно найти в книге «Олимпиады им. И.Ф.Шарыгина» («Библиотечка «Квант», вып.113, 2009 г.). Автор благодарит И.И.Богданова, Н.Белухова, А.Д.Блинкова, Ю.А.Блинкова, Е.С.Горскую, П.А.Кожевникова, Д.В.Прокопенко, В.Ю.Протасова, Б.Р.Френкина, Д.В.Швецова и А.Якубова, написавших и проиллюстрировавших часть решений, а также регулярно проверявших и исправлявших материалы олимпиад.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VI ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8)[1] Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая – какой-то из биссектрис, а третья – какой-то из медиан?

Б.Френкин

2. (8) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Пусть O – центр описанной окружности треугольника CA_1B_1. Докажите, что $OI \perp AB$.

Д.Швецов

3. (8) Точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Точка X такова, что $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$ и $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$. Докажите, что четырехугольник $XA'BC'$ – вписанный.

Ф.Нилов

4. (8) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Окружности, описанные вокруг треугольников ANB и CND, повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром N.

Д.Швецов

5. (8–9) На высоте BD треугольника ABC взята точка E такая, что $\angle AEC = 90°$. Точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников AEB и CEB; F, L – середины отрезков AC и O_1O_2. Докажите, что точки L, E, F лежат на одной прямой.

Д.Швецов

6. (8–9) На стороне BC равностороннего треугольника ABC взяты точки M и N (M лежит между B и N) такие, что

[1] В скобках после номера задачи указан класс, для которого она предназначена.

$\angle MAN = 30^\circ$. Описанные окружности треугольников AMC и ANB пересекаются в точке K. Докажите, что прямая AK содержит центр описанной окружности треугольника AMN.

Д.Швецов

7. (8–9) Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная медиане BM. Эта прямая пересекает высоты, выходящие из A и C (или их продолжения), в точках K и N. Точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABK и CBN соответственно. Докажите, что $O_1M = O_2M$.

Д.Швецов

8. (8–10) В треугольнике ABC проведена высота AH. Точки I_b и I_c – центры вписанных окружностей треугольников ABH и CAH; L – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Найдите угол LI_bI_c.

Д.Швецов

9. (8–10) Назовем точку внутри треугольника *хорошей*, если три чевианы, проходящие через нее, равны. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а количество хороших точек нечетно. Чему оно может быть равно?

Б.Френкин

10. (8–11) Дан треугольник ABC. С помощью двусторонней линейки, проведя не более восьми линий, постройте на стороне AB такую точку D, что $AD/BD = BC/AC$.

И.Богданов

11. (8–11) Выпуклый n-угольник разрезан на 3 выпуклых многоугольника. У одного из них n сторон, у другого – больше, чем n, у третьего – меньше, чем n. Каковы возможные значения n?

Б.Френкин

12. (9) В прямоугольном треугольнике ABC AC – больший катет, CH – высота, проведенная к гипотенузе. Окружность с центром H и радиусом CH пересекает катет AC в точке M. Точка B' симметрична точке B относительно H. В точке B' восставлен перпендикуляр к гипотенузе, который пересекает окружность в точке K. Докажите, что:

а) $B'M \parallel BC$;

б) AK – касательная к окружности.

А.Блинков, Ю.Блинков, М.Сандрикова

13. (9) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. На диагонали BD выбрана точка K такая, что $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Докажите, что $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

С.Берлов

14. (9–10) На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что CM и BM параллельны AB и CD соответственно. Докажите, что $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$.

С.Берлов

15. (9–11) В остроугольном треугольнике ABC AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке K. Окружности, описанные вокруг треугольников A_1KC_1 и A_1KB_1, вторично пересекают прямые AB и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что

а) сумма диаметров этих окружностей равна стороне BC;

б) $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$.

Д.Прокопенко, А.Блинков

16. (9–11) В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE.

Ф.Нилов

17. (9–11) Постройте треугольник по высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и медиане, проведенной из другой вершины.

Предложил С.Токарев

18. (9–11) На хорде AC окружности ω выбрали точку B. На отрезках AB и BC как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, которые пересекают ω второй раз в точках D и E соответственно. Лучи O_1D и O_2E пересекаются в точке F. Лучи AD и CE пересекаются в точке G. Докажите, что прямая FG проходит через середину AC.

Д.Прокопенко

19. (9–11) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки P и Q диаметрально противоположны C и D соответственно. Касательные к окружности в этих точках пересекают прямую AB в точках E и F (A лежит между E и B, B – между A и F). Прямая EO пересекает AC и BC в точках X и Y, а прямая FO пересекает AD и BD в точках U и V. Докажите, что $XV = YU$.

В.Ясинский, Украина

20. (10) Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A_2, B_2 – середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 соответственно, O – центр описанной окружности треугольника, P – одна из точек пересечения прямой CO с вписанной окружностью. Прямые PA_2 и PB_2 вторично пересекают вписанную окружность в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на высоте треугольника, опущенной на AB.

Ф.Ивлев

21. (10–11) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC$. Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

А.Акопян

22. (10–11) Окружность с центром F и парабола с фокусом F пересекаются в двух точках. Докажите, что на окружности найдутся такие четыре точки A, B, C, D, что прямые AB, BC, CD и DA касаются параболы.

А.Заславский

23. (10–11) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Известно, что $AB \cdot CF = 2BC \cdot FA$, $CD \cdot EB = 2DE \cdot BC$, $EF \cdot AD = 2FA \cdot DE$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Н.Белухов, Болгария

24. (10–11) Дана прямая l в пространстве и точка A, не лежащая на ней. Для каждой прямой l', проходящей через A, построим общий перпендикуляр XY (Y лежит на l') к прямым l и l'. Найдите ГМТ точек Y.

А.Акопян

25. (11) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение ребер икосаэдров.

Н.Белухов

Финальный тур

8 класс

1. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A.

М.Рожкова, Украина

2. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что точки A, B и C можно накрыть кругом единичного радиуса.

А.Акопян

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

С.Берлов, Д.Прокопенко

4. В равные углы X_1OY и YOX_2 вписаны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся сторон OX_1 и OX_2 в точках A_1 и A_2 соответственно, а стороны OY – в точках B_1 и B_2. Точка C_1 – вторая точка пересечения A_1B_2 и ω_1, а точка C_2 – вторая точка пересечения A_2B_1 и ω_2. Докажите, что C_1C_2 – общая касательная к окружностям.

И.Богданов

5. В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Известно, что в треугольнике HLM прямая AH является высотой, а BL – биссектрисой. Докажите, что CM является в этом треугольнике медианой.

Б.Френкин

6. Точки E, F – середины сторон BC, CD квадрата $ABCD$. Прямые AE и BF пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle PDA = \angle AED$.

Д.Прокопенко

7. Каждый из двух правильных многоугольников P и Q разрезали прямой на две части. Одну из частей P и одну из частей Q сложили друг с другом по линии разреза. Может ли получиться правильный многоугольник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть сторон?

Б.Френкин

8. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. На отрезках A_1I и B_1I построены как на основаниях равнобедренные треугольники с вершинами A_2 и B_2, лежащими на прямой AB. Известно, что прямая CI делит отрезок A_2B_2 пополам. Верно ли, что треугольник ABC – равнобедренный?

А.Заславский

9 класс

1. Для каждой вершины треугольника ABC нашли угол между высотой и биссектрисой, проведенными из этой вершины. Оказалось, что эти углы в вершинах A и B равны друг другу и меньше, чем угол в вершине C. Чему равен угол C треугольника?

Б.Френкин

2. Два треугольника пересекаются. Докажите, что внутри описанной окружности одного из них лежит хотя бы одна вершина другого. (Здесь треугольником считается часть плоскости, ограниченная замкнутой трехзвенной ломаной; точка, лежащая на окружности, считается лежащей внутри нее.)

А.Акопян

3. На прямой лежат точки X, Y, Z (именно в таком порядке). Треугольники XAB, YBC, ZCD – правильные, причем вершины первого и третьего ориентированы против часовой стрелки, а второго по часовой стрелке. Докажите, что прямые AC, BD и XY пересекаются в одной точке.

В.Ясинский

4. В треугольнике ABC отметили точки A', B' касания сторон BC, AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB'. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

А.Заславский

5. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$), касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_2. Точка A_0 – центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2B_1$; аналогично определяется точка C_0. Найдите угол A_0BC_0.

Д.Швецов

6. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную окружность в точке M. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.

Ю.Блинков

7. В треугольнике ABC AL_a и AM_a – внутренняя и внешняя биссектрисы угла A. Пусть ω_a – окружность, симметричная описанной окружности треугольника AL_aM_a относительно середины BC. Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

Н.Белухов

8. На доске нарисован правильный многоугольник. Володя хочет отметить k точек на его периметре так, чтобы не существовало другого правильного многоугольника (не обязательно с тем же числом сторон), также содержащего отмеченные точки на своем периметре. Найдите наименьшее k, достаточное для любого исходного многоугольника.

В.Гуровиц

10 класс

1. Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника; R, r – радиусы этих окружностей; J – точка, симметричная вершине прямого угла относительно I. Найдите OJ.

А.Заславский

2. Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $\cos\angle A + \cos\angle B = 1$.

П.Кожевников

3. Два выпуклых многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ ($n \geq 4$) таковы, что любая сторона первого больше соответствующей стороны второго. Может ли оказаться, что любая диагональ второго больше соответствующей диагонали первого?

А.Акопян

4. Проекции двух точек на стороны четырехугольника лежат на двух различных концентрических окружностях (проекции каждой точки образуют вписанный четырехугольник, а радиусы соответствующих окружностей различны). Докажите, что четырехугольник – параллелограмм.

Ф.Нилов

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) проведена высота BH. Окружность, вписанная в треугольник ABH, касается сторон AB, AH в точках H_1, B_1 соответственно; окружность, вписанная в треугольник CBH, касается сторон CB, CH в точках H_2, B_2 соответственно. Пусть O – центр описанной окружности треугольника H_1BH_2. Докажите, что $OB_1 = OB_2$.

Д.Швецов

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A', B' и C'. Известно, что ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Верно ли, что ABC – правильный?

Ф.Нилов

7. Каждый из двух правильных многогранников P и Q разрезали плоскостью на две части. Одну из частей P и одну из частей Q приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

Б.Френкин

8. Вокруг треугольника ABC описали окружность k. На сторонах треугольника отметили три точки A_1, B_1 и C_1, после чего сам треугольник стерли. Докажите, что его можно однозначно восстановить тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Н.Белухов

VII ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8) Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?

А.Заславский

2. (8) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 6$ проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH. Найдите MH, где M – середина BC.

Из сингапурских олимпиад

3. (8) В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

Д.Швецов

4. (8) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике $A'B'C'$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

Б.Френкин

5. (8) В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник $A'B'C'$ будет равносторонним?

Б.Френкин

6. (8) Даны две единичные окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точках A и B. На окружности ω_1 взяли произвольную точку M, а на окружности ω_2 – точку N. Через точки M и N провели еще две единичные окружности ω_3 и ω_4. Обозначим повторное пересечение ω_1 и ω_3 через C, повторное пересечение окружностей ω_2 и ω_4 – через D. Докажите, что $ACBD$ – параллелограмм.

А.Акопян

7. (8–9) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

А.Акопян

8. (8–9) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$), касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно; A_2, C_2 – точки, симметричные точке B_1 относительно прямых BC, AB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, C_1C_2 пересекаются на медиане треугольника ABC.

Д.Швецов

9. (8–9) Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведенные к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

Д.Швецов

10. (8–9) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На боковой стороне CD выбрана точка M, а на основаниях BC и AD – точки P и Q так, что отрезки MP и MQ параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что прямая PQ проходит через точку O.

М.Волчкевич

11. (8–10) Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) касается стороны BC в точке A_1, а прямой AC в точке A_2. Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) окружность, вписанную в треугольник ABC, в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC \parallel A'C'$.

Д.Швецов

12. (8–10) Пусть AP и BQ – высоты данного остроугольного треугольника ABC. Постройте циркулем и линейкой на стороне AB такую точку M, чтобы $\angle AQM = \angle BPM$.

В.Ясинский

13. а) (8–10) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) (11) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

Б.Френкин

14. (9) В треугольнике ABC высота и медиана из вершины A образуют (вместе с прямой BC) треугольник, в котором биссектриса угла A является медианой, а высота и медиана из вершины B образуют (вместе с прямой AC) треугольник, в котором биссектриса угла B является биссектрисой. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

Б.Френкин

15. (9–10) Дана окружность с центром O и радиусом 1. Из точки A к ней проведены касательные AB и AC. Точка M, лежащая на окружности, такова, что четырехугольники $OBMC$ и $ABMC$ имеют равные площади. Найдите MA.

В.Протасов

16. (9–10) Дан треугольник ABC и прямая l. Прямые, симметричные l относительно AB и AC, пересекаются в точке A_1 . Точки B_1 , C_1 определяются аналогично. Докажите, что

а) прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке;

б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;

в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

П.Долгирев

17. (9–11) а) Существует ли треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее, чем наибольшая биссектриса?

б) Существует ли треугольник, в котором наименьшая биссектриса длиннее, чем наибольшая высота?

Б.Френкин

18. (9–11) На плоскости проведены n прямых общего положения, т.е. никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое

а) наименьшее;

б) наибольшее

количество углов может быть среди этих частей?

А.Заславский

19. (9–11) Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

А.Заславский

20. (9–11) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.

Н.Белухов, А.Заславский

21. (10–11) На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N – середины хорд AB, BC, а P, Q – середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB – в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

В.Ясинский

22. (10–11) Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

Г.Фельдман

23. (10–11) Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' – середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.

б) Докажите, что, если l проходит через центр описанной окружности ΔABC, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.

Н.Белухов, М.Маринов, Болгария

24. (10–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

А.Заславский

25. (10–11) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?

Н.Белухов

Финальный тур

8 класс

1. В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

А.Блинков

2. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, положил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провел диагональ, опустил на нее перпендикуляры из двух оставшихся вершин, разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону, так что вместе с нижним прямоугольником они образовали прямоугольник.

Как по полученному прямоугольнику восстановить исходный с помощью циркуля и линейки?

Т.Голенищева-Кутузова

3. Около треугольника ABC описали окружность. Пусть A_1 – точка пересечения с нею прямой, параллельной BC и проходящей через A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

А.Мякишев, Д.Мавло

4. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых тоже равна 1. Докажите, что в окружность можно вписать правильный шестиугольник, стороны которого не пересекают этих хорд.

А.Шаповалов

5. Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая, не пересекающая отрезок BC. По разные стороны от точки A на этой прямой взяты точки M и N так, что $AM = AN = AB$ (точка B внутри угла MAC). Докажите, что прямые AB, AC, BN, CM образуют вписанный четырехугольник.

С.Маркелов

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1; A_0 – середина стороны BC. Прямые A_0B_1 и A_0C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника PA_0Q лежит на высоте треугольника ABC.

Д.Прокопенко

7. На плоскости отмечена точка M, не лежащая на осях координат. По оси ординат движется точка Q, а по оси абсцисс точка P так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных M относительно PQ.

А.Акопян

8. Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

А.Заславский

9 класс

1. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через A_1, B_1 в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 – в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

М.Кунгожин, Казахстан

2. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Точки P и Q на серединном перпендикуляре к CB таковы, что $\angle CAP = \angle PAQ = \angle QAB = \frac{\angle A}{3}$. Докажите, что Q – центр описанной окружности треугольника CPB.

Д.Кеян, Молдова

3. Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M, H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

А.Карлюченко, Украина

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Биссектрисы его углов образуют четырехугольник, вписанный в окружность с центром I, а биссектрисы внешних углов – четырехугольник, вписанный в окружность с центром J. Докажите, что O – середина IJ.

А.Заславский

5. Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?

Б.Френкин

6. В треугольнике ABC AA_0 и BB_0 – медианы, AA_1 и BB_1 – высоты. Описанные окружности треугольников CA_0B_0 и CA_1B_1 вторично пересекаются в точке M_c. Аналогично определяются точки M_a, M_b. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой, а прямые AM_a, BM_b, CM_c параллельны.

П.Долгирев

7. В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая l пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω – в точках B и C, окружность Ω – в точках D и E (порядок точек на прямой – A, B, C, D, E, F). Пусть $BC = DE$. Докажите, что $AB = EF$.

И.Богданов

8. Выпуклый n-угольник P, где $n > 3$, разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения n, если n-угольник описанный?

Б.Френкин

10 класс

1. В треугольнике ABC середины сторон AC, BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Докажите, что она касается окружности, проходящей через вершины A, B и ортоцентр треугольника ABC.

М.Рожкова

2. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' – середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырехугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD' – вписанный.

Л.Емельянов

3. Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар ребер A_iA_j и B_kB_l, где $(i,\ j,\ k,\ l)$ – перестановка чисел (1, 2, 3, 4) (например, A_1A_2 и B_3B_4). Известно, что во всех парах, кроме одной, ребра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре ребра тоже перпендикулярны.

А.Акопян

4. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В угол ADC вписана окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника ACD, а в угол BDC – окружность, касающаяся изнутри описанной окружности треугольника BCD. Оказалось, что эти окружности касаются отрезка CD в одной и той же точке X. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из X на AB, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

В.Мокин

5. Точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне. Докажите, что эта сторона составляет треть периметра треугольника.

А.Блинков

6. Докажите, что для любого неравнобедренного треугольника $l_1^2 > \sqrt{3}S > l_2^2$, где l_1, l_2 – наибольшая и наименьшая биссектрисы треугольника, S – его площадь.

М.Рожкова

7. В остроугольном треугольнике ABC O – центр описанной окружности, A_1, B_1, C_1 – основания высот. На прямых OA_1, OB_1, OC_1 нашли такие точки A', B', C' соответственно, что четырехугольники $AOBC'$, $BOCA'$, $COAB'$ вписанные. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AA_1A', BB_1B', CC_1C', имеют общую точку.

Г.Фельдман

8. Есть лист жести размером 6×6. Разрешается надрезать его, но так, чтобы он не распадался на части, и сгибать. Как сделать куб с ребром 2, разделенный перегородками на единичные кубики?

С.Токарев

VIII ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8) В треугольнике ABC точка M − середина AB, а точка D − основание высоты CD. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$ тогда и только тогда, когда $AC = 2MD$.

М.Рожкова

2. (8) Вписанный n-угольник разбит непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями на треугольники. Каждый из получившихся треугольников подобен хотя бы одному из остальных.

При каких n возможна описанная ситуация?

Б.Френкин

3. (8) Окружность с центром I касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1. Прямые AI, CI, B_1I пересекают A_1C_1 в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\angle YB_1Z = \angle XB_1Z$.

Д.Швецов

4. (8) Дан треугольник ABC. Пусть M − середина стороны BC, а P − проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB равнобедренный.

А.Акопян

5. (8) На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Касательная, проведенная в точке D к описанной окружности треугольника BDC, пересекает сторону AB в точке C_1; аналогично определяется точка A_1. Докажите, что $A_1C_1 \parallel AC$.

Д.Швецов

6. (8–9) На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC отметили точку C_1 такую, что $BC = CC_1$. Затем на катете AB отметили точку C_2 такую, что $AC_2 = AC_1$; аналогично определяется точка A_2. Найдите угол AMC, где M − середина отрезка A_2C_2.

Д.Швецов

7. (8–9) В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы углов A и B обратно пропорциональны противолежащим сторонам. Найдите угол C.

Б.Френкин

8. (8–9) Пусть BM − медиана прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$). Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается сторон AB, AM в точках A_1, A_2; аналогично определяются точки C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2 и C_1C_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

Д.Швецов

9. (8–9) Восстановите треугольник ABC по прямым l_b и l_c, содержащим биссектрисы углов B и C, и основанию биссектрисы угла A – точке L_1.

А.Карлюченко

10. В выпуклом четырехугольнике все стороны и все углы попарно различны.

а) (8–9) Может ли наибольший угол примыкать к наибольшей стороне, и при этом наименьший – к наименьшей?

б) (9–11) Может ли наибольший угол не примыкать к наименьшей стороне, и при этом наименьший – к наибольшей?

Б.Френкин, А.Заславский

11. Дан треугольник ABC и точка P. Точки A', B', C' – проекции P на BC, CA, AB. Прямая, проходящая через P и параллельная AB, вторично пересекает описанную окружность треугольника $PA'B'$ в точке C_1. Точки A_1, B_1 определены аналогично. Докажите, что

а) (8–10) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

б) (9–11) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

Чан Куанг Хюнг, Вьетнам

12. (9–10) Пусть O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, проходящая через O и параллельная BC, пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Известно, что сумма расстояний от точки O до сторон AB и AC равна OA. Докажите, что сумма отрезков PB и QC равна PQ.

М.Жанбулатулы, Казахстан

13. (9–10) Даны точки A, B. Найдите геометрическое место таких точек C, что C, середины отрезков AC, BC и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной окружности.

А.Заславский

14. (9–10) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AC \cap BD = O$ и M – середина BC. Пусть $MO \cap AD = E$. Докажите, что $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CDO}}$.

М.Волчкевич

15. (9–11) Дан треугольник ABC. Рассматриваются прямые l, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные l относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

А.Заславский

16. (9–11) Дан прямоугольный треугольник ABC, где AB – гипотенуза. Пусть M – середина AB, O – центр описанной окружности ω треугольника CMB. Прямая AC вторично пересекает окружность ω в точке K. Отрезок KO пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L. Докажите, что отрезки AL и KM пересекаются на описанной окружности треугольника ACM.

Ф.Ивлев

17. (9–11) Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Точка M лежит на дуге BC, прямая AM пересекает BD в точке P, прямая DM пересекает AC в точке Q. Докажите, что площадь четырехугольника $APQD$ равна половине площади квадрата.

М.Рожкова

18. (9–11) На плоскости начерчен треугольник и в нем отмечены две точки. Известно, что какой-то из углов равен $58°$, какой-то из остальных $59°$, какая-то из отмеченных точек является центром вписанной окружности, а другая – центром описанной. Используя только линейку без делений, определите, где какой угол и где какая точка.

Б.Френкин

19. (10–11) Две окружности радиуса 1 пересекаются в точках X, Y, расстояние между которыми тоже равно 1. Из точки C одной окружности проведены к другой касательные CA, CB, вторично пересекающие первую окружность в точках B', A'. Прямые AA' и BB' пересекаются в точке Z. Найдите угол XZY.

А.Заславский

20. (10–11) В треугольнике ABC на стороне AB отметили точку D. Пусть ω_1 и Ω_1, ω_2 и Ω_2, соответственно, вписанные и вневписанные (касающиеся AB во внутренней точке) окружности треугольников ACD и BCD. Докажите, что общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, Ω_1 и Ω_2 пересекаются на прямой AB.

Г.Фельдман

21. (10–11) Через ортоцентр остроугольного треугольника проведены две перпендикулярные прямые. Стороны треугольника высекают на каждой из этих прямых два отрезка: один – лежащий внутри треугольника, второй – вне его. Докажите, что произведение двух внутренних отрезков равно произведению двух внешних.

Н.Белухов, Э.Колев, Болгария

22. (10–11) В сегмент, ограниченный хордой и дугой AB окружности, вписана окружность ω с центром I. Обозначим середину указанной дуги AB через M, а середину дополнительной дуги через N. Из точки N проведены две прямые, касающиеся ω в точках C и D. Противоположные стороны AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке X, диагонали $ABCD$ пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, Y, I и M лежат на одной прямой.

Ф.Нилов

23. (10–11) На каждой из двенадцати диагоналей граней куба выбирается произвольная точка. Определяется центр тяжести этих двенадцати точек. Найдите геометрическое место всех таких центров тяжести.

А.Канель

24. (10–11) На плоскости даны n ($n > 2$) точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколькими различными способами это множество точек можно разбить на два непустых подмножества так, чтобы выпуклые оболочки этих подмножеств не пересекались?

В.Ясинский

Финальный тур

8 класс

1. Точка M – середина основания AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC. Точка N симметрична M относительно BC. Прямая, параллельная AC и проходящая через точку N, пересекает сторону AB в точке K. Найдите угол AKC.

А.Блинков

2. В треугольнике ABC провели биссектрисы BB' и CC', а затем стерли весь рисунок, кроме точек A, B' и C'. Восстановите треугольник ABC при помощи циркуля и линейки.

А.Карлюченко

3. Квадратный лист бумаги согнули по прямой так, что одна из вершин квадрата оказалась на несмежной стороне

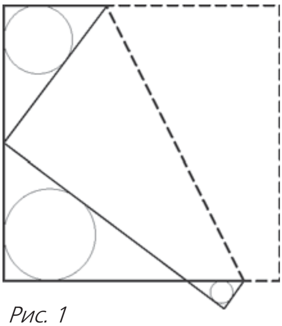


Рис. 1

(рис.1). При этом образовалось три треугольника. В эти треугольники вписали окружности. Докажите, что радиус одной из этих окружностей равен сумме радиусов двух других.

Л.Штейнгарц, Израиль

4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяли точки P и Q соответственно так, что лучи AQ и CP пересекаются под прямым углом. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

А.Акопян, Д.Швецов

5. Существует ли выпуклый четырехугольник и точка P внутри него такие, что сумма расстояний от P до вершин больше периметра четырехугольника?

А.Акопян

6. Окружность ω описана около треугольника ABC. На продолжении стороны AB за точку B взяли точку B_1 такую, что $AB_1 = AC$. Биссектриса угла A пересекает ω вторично в точке W. Докажите, что ортоцентр треугольника AWB_1 лежит на ω.

А.Туманян, Украина

7. Высоты AA_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка Q симметрична середине стороны AC относительно AA_1. Точка P − середина отрезка A_1C_1. Докажите, что $\angle QPH = 90°$.

Д.Швецов

8. Квадрат разрезан на несколько (больше одного) выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон. Докажите, что среди них есть треугольник.

А.Заславский

9 класс

1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 и BB_1, которые пересекаются в точке O. Затем провели высоту A_1A_2 в треугольнике OBA_1 и высоту B_1B_2 в треугольнике AOB_1. Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.

Л.Штейнгарц

2. Через вершины A, B, C треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие вторично описанную около него окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

Д.Швецов, А.Заславский

3. В треугольнике ABC провели биссектрису CL. В треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Затем все, кроме точек A, L, M и N, стерли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник.

В.Протасов

4. При каких $n > 3$ правильный n-угольник можно разрезать диагоналями (возможно, пересекающимися внутри него) на равные треугольники?

Б.Френкин

5. Пусть ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы, что $AM = NC$. На продолжении стороны CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM.

М.Кунгожин

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AB = AC = b$. На стороне AC во внешнюю сторону построен треугольник ADC, в котором $AD = DC = a$. Пусть CM и CN – биссектрисы в треугольниках ABC и ADC соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CMN.

М.Рожкова

7. В выпуклом пятиугольнике P провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на десять треугольников и один пятиугольник P'. Из суммы площадей треугольников, прилегающих к сторонам P, вычли площадь P'; получилось число N. Совершив те же операции с пятиугольником P', получили число N'. Докажите, что $N > N'$.

А.Белов

8. Пусть AH – высота остроугольного треугольника ABC. Точки K и L – проекции H на стороны AB и AC. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую KL в точках P и Q, а прямую AH – в точках A и T. Докажите, что точка H является центром окружности, вписанной в треугольник PQT.

М.Плотников, Украина

10 класс

1. При каких n можно оклеить в один слой поверхность клетчатого куба $n \times n \times n$ бумажными прямоугольниками 1×2 так, чтобы каждый прямоугольник граничил по отрезкам сторон ровно с пятью другими?

А.Шаповалов

2. Точку внутри треугольника назовем *хорошей*, если длины проходящих через нее чевиан обратно пропорциональны длинам соответствующих сторон. Найдите все треугольники, для которых число хороших точек – максимальное возможное.

А.Заславский, Б.Френкин

3. Пусть M и I – точки пересечения медиан и биссектрис неравнобедренного треугольника ABC, а r – радиус вписанной в него окружности. Докажите, что $MI = r/3$ тогда и только тогда, когда прямая MI перпендикулярна одной из сторон треугольника.

А.Карлюченко

4. Дан квадрат. Найдите геометрическое место середин гипотенуз прямоугольных треугольников, вершины которых лежат на попарно различных сторонах квадрата и не совпадают с его вершинами.

Б.Френкин

5. В окружность ω вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого перпендикулярны. На сторонах AB и CD во внешнюю сторону как на диаметрах построены дуги α и β. Рассмотрим две луночки, образованные окружностью ω и дугами α и β (рис.2). Докажите, что максимальные радиусы окружностей, вписанных в эти луночки, равны.

Ф.Нилов

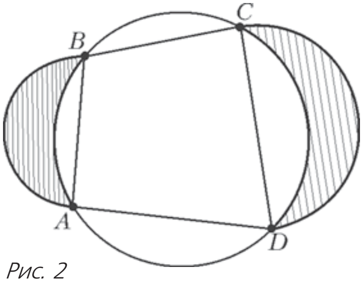


Рис. 2

6. Дан тетраэдр $ABCD$. Точка X выбрана вне тетраэдра так, что отрезок XD пересекает грань ABC во внутренней точке. Обозначим через A', B',

C' проекции точки D на плоскости XBC, XCA, XAB соответственно. Докажите, что $A'B' + B'C' + C'A' \le DA + DB + DC$.

В.Ясинский

7. Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

Ф.Ивлев

8. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрали точку M. Пусть X, Y, Z – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, CMD, AMD соответственно. Пусть H_x , H_y , H_z – ортоцентры треугольников AXB, CYD, AZD соответственно. Докажите, что точки H_x , H_y , H_z лежат на одной прямой.

Д.Швецов

IX ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8) В треугольнике ABC $AB = BC$. Из точки E на стороне AB опущен перпендикуляр ED на BC. Оказалось, что $AE = DE$. Найдите угол DAC.

Н.Москвитин

2. (8) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) угол при вершине C равен $20°$. Биссектрисы углов A и B пересекают боковые стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1 . Докажите, что треугольник A_1OB_1 (где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC) является равносторонним.

Л.Штейнгарц

3. (8) Вневписанная окружность, соответствующая вершине A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$), касается продолжений сторон AB, AC в точках A_1 , A_2 соответственно; аналогично определим точки C_1 , C_2 . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые C_1C_2 , A_1C_1 , A_1A_2 , пересекаются в одной точке.

Д.Швецов

4. (8) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка O – центр описанной около него окружности, а точка K – центр окружности w, описанной около треугольника BCO. Высота треугольника, проведенная из точки A, пересекает окружность w в точке P. Прямая PK пересекает описанную окружность треугольника в точках E и F. Докажите, что один из отрезков EP и FP равен отрезку PA.

Ф.Ивлев

5. (8) Точка внутри выпуклого четырехугольника соединена с вершинами. Получились четыре равных треугольника. Верно ли, что четырехугольник – ромб?

Б.Френкин

6. (8–9) Диагонали AC, BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников ABP, CDP пересекают прямую AD в точках X, Y. Точка M – середина XY. Докажите, что $BM = CM$.

Д.Швецов

7. (8–9) Пусть BD – биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c – центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90°$.

Д.Швецов

8. (8–9) Вокруг треугольника ABC описана окружность. Пусть X – точка внутри окружности, K и L – точки пересечения окружности и прямых BX и CX соответственно. Прямая LK пересекает BA в точке E, а прямую AC в точке F. Найдите геометрическое место таких точек X, что окружности, описанные около треугольников AFK и AEL, касаются.

М.Плотников

9. (8–9) Пусть T_1, T_2 – точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC и AC соответственно. Оказалось, что точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника относительно середины AB, лежит на окружности, описанной около треугольника CT_1T_2. Найдите угол BCA.

М.Плотников

10. (8–9) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C'. Окружность, вписанная в треугольник ACC', касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1; окружность, вписанная в треугольник BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

Д.Швецов

11. (8–9) а) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$ – взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB. Может ли оказаться, что $r_4 > 2r_3$?

б) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Пусть $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$ – взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE. Может ли оказаться, что $r_2 > 2r_1$?

П.Кожевников

12. (8–11) На каждой стороне треугольника ABC отмечены две различные точки. Известно, что это основания высот и биссектрис.

а) Пользуясь только линейкой без делений, определите, где высоты, а где биссектрисы.

б) Решите пункт а), проведя только три прямых.

Б.Френкин

13. (9–10) Пусть A_1 и C_1 – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно, а A' и C' – точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол B, с продолжениями сторон BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и BA перпендикулярны.

Ф.Ивлев

14. (9–11) Точки M, N – середины диагоналей AC, BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90°$). Описанные окружности треугольников ABN, CDM пересекают прямую BC в точках Q, R. Докажите, что точки Q, R равноудалены от середины отрезка MN.

Д.Швецов

15. (9–11) а) В треугольник ABC вписаны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что $C_1A_1 \perp BC$, $A_1B_1 \perp CA$, $B_1C_1 \perp AB$, $B_2A_2 \perp BC$, $C_2B_2 \perp CA$, $A_2C_2 \perp AB$. Докажите, что эти треугольники равны.

В.Расторгуев

б) Внутри треугольника ABC взяли точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 так, что A_1 – на отрезке AB_1, B_1 – на отрезке BC_1, C_1 – на отрезке CA_1, A_2 – на отрезке AC_2, B_2 – на отрезке BA_2, C_2 – на отрезке CB_2 и углы BAA_1, CBB_1, ACC_1, CAA_2, ABB_2,

BCC_2 равны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

П.Кожевников

16. (9–11) Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану из вершины C пересекает прямую $A'B'$ в точке K. Докажите, что $CK \parallel AB$.

Ф.Ивлев

17. (9–11) Дан вписанный четырехугольник, острый угол между диагоналями которого равен φ. Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырехугольника с теми же длинами сторон меньше φ.

А.Заславский

18. (9–11) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

А.Иванов

19. (10–11) а) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе AL в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на прямой BC.

б) В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABL и ACL соответственно. Точки B_1 и C_1 – проекции вершин C и B на биссектрисы углов B и C соответственно. Докажите, что прямые O_1C_1 и O_1B_1 пересекаются на прямой BC.

в) Докажите, что точки, полученные в пунктах а) и б), совпадают.

Д.Прокопенко

20. (10–11) На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1. Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2. Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну точку.

В.Ясинский

21. (10–11) Дана окружность ω и точка A вне ее. Через A проведены две прямые, одна из которых пересекает ω в точках

B и C, а другая – в точках D и E (D лежит между A и E). Прямая, проходящая через D и параллельная BC, вторично пересекает ω в точке F, а прямая AF – в точке T. Пусть M – точка пересечения прямых ET и BC, а N – точка, симметричная A относительно M. Докажите, что описанная около треугольника DEN окружность проходит через середину отрезка BC.

В.Ясинский

22. (10–11) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

А.Заславский

23. (10–11) Выпуклые многогранники A и B не имеют общих точек. Многогранник A имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из A и B, если B имеет а) 2012; б) 2013 плоскостей симметрии?

в) Каков будет ответ в пункте б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?

Б.Френкин

Финальный тур

8 класс

1. Дан равносторонний пятиугольник $ABCDE$ с прямыми углами ABC и AED. Диагонали BD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что отрезок FA равен стороне пятиугольника.

Н.Москвитин

2. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Биссектриса угла O_1AO_2 повторно пересекает окружности в точках C и D.

Докажите, что центр описанной окружности треугольника CBD равноудален от точек O_1 и O_2.

Д.Швецов

3. В выпуклом многоугольнике из каждой вершины опущены перпендикуляры на все не смежные с ней стороны. Может ли оказаться так, что основание каждого перпендикуляра попало на продолжение стороны, а не на саму сторону?

Б.Френкин

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке L. В треугольнике ABL отметили точку пересечения высот H, а в треугольниках BCL, CDL и DAL – центры O_1, O_2 и O_3 описанных окружностей. Затем весь рисунок, кроме точек H, O_1, O_2, O_3, стерли. Восстановите его.

А.Заславский

5. Высота AA', медиана BB' и биссектриса CC' треугольника ABC пересекаются в точке K. Известно, что $A'K = B'K$. Докажите, что и отрезок $C'K$ имеет ту же длину.

Б.Френкин

6. На отрезке AB построена дуга α. Окружность ω касается AB в точке T и пересекает α в точках C и D. Лучи AC и TD пересекаются в точке E, лучи BD и TC – в точке F. Докажите, что прямые EF и AB параллельны.

Ф.Нилов

7. Три окружности касаются друг друга извне и касаются четвертой окружности изнутри. Их центры были отмечены, а сами окружности стерты. Оказалось, что невозможно установить, какая из отмеченных точек – центр объемлющей окружности. Докажите, что отмеченные точки образуют прямоугольник.

Б.Френкин

8. Пусть P – произвольная точка на дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки B. Биссектриса угла APB пересекает биссектрису угла BAC в точке P_a; биссектриса угла CPB пересекает биссектрису угла BCA в точке P_c. Докажите, что для всех точек P центры описанных окружностей треугольников PP_aP_c лежат на одной прямой.

И.Дмитриев

9 класс

1. Пятиугольник $ABCDE$, все углы которого тупые, вписан в окружность ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E_1; продолжения сторон BC и DE – в точке A_1. Касательная, проведенная в точке B к описанной окружности треугольника BE_1C, пересекает ω в точке B_1; аналогично определяется точка D_1. Докажите, что $B_1D_1 \parallel AE$.

Д.Швецов

2. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки C и D, лежащие соответственно на ω_1 и ω_2 по разные стороны от прямой AB, равноудалены от этой прямой. Докажите, что точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2.

Ф.Нилов

3. Длина каждой стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ не меньше 1 и не больше 2. Его диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $S_{AOB}+S_{COD}\le 2(S_{AOD}+S_{BOC})$.

И.Богданов

4. Дан треугольник ABC и точка F, такая что $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Прямая, проходящая через F и перпендикулярная BC, пересекает медиану, проведенную из вершины A, в точке A_1. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 являются тремя вершинами правильного шестиугольника, три другие вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC.

Н.Белухов

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и F. Прямые EF и BC пересекаются в точке S. Точки M и N – середины отрезков BC и EF соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная MN, пересекает BC в точке K. Докажите, что $BK/CK = FS/ES$.

В.Ясинский

6. Через вершину B правильного треугольника ABC проведена прямая l. Окружность ω_a с центром I_a касается стороны BC в точке A_1 и прямых l, AC. Окружность ω_c с центром I_c касается стороны BA в точке C_1 и прямых l, AC. Докажите, что ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой I_aI_c.

Д.Швецов, Ю.Зайцева, А.Соколов

7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точке O. Окружность с центром O и произвольным радиусом R пересекает ω_1 в точках A и B, а ω_2 – в точках C и D. Пусть X – точка пересечения прямых AC и BD. Докажите, что при изменении радиуса R все точки X лежат на одной прямой.

А.Карлюченко

8. Три велосипедиста ездят по кольцевой дороге радиуса 1 км против часовой стрелки с постоянными различными скоростями. Верно ли, что, если они будут кататься достаточно долго, то найдется момент, когда расстояние между любыми двумя из них будет больше 1 км?

В.Протасов

10 класс

1. Окружность k проходит через вершины B и C треугольника ABC ($AB > AC$) и пересекает продолжения сторон AB и AC за точки B и C в точках P и Q соответственно. Пусть

AA_1 – высота треугольника ABC. Известно, что $A_1P = A_1Q$. Докажите, что угол PA_1Q в два раза больше угла A треугольника ABC.

В.Ясинский

2. В описанном четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD \neq BC$. Диагонали четырехугольника пересекаются в точке L. Докажите, что угол ALB острый.

А.Полянский

3. Пусть X – такая точка внутри треугольника ABC, что $XA \cdot BC = XB \cdot AC = XC \cdot AB$; I_1, I_2, I_3 – центры вписанных окружностей треугольников XBC, XCA и XAB соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2 и CI_3 пересекаются в одной точке.

А.Карлюченко

4. Дан бумажный треугольник, площадь которого равна $1/2$, а квадраты всех сторон – целые числа. Докажите, что в него можно завернуть квадрат с площадью $1/4$ (треугольник можно сгибать, но нельзя резать).

Н.Белухов

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Точки E и F – середины не содержащих других вершин дуг AB и CD соответственно. Прямые, проходящие через точки E и F параллельно диагоналям четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точках K и L. Докажите, что прямая KL содержит точку O.

Д.Швецов

6. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1, которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр из точки C к прямой A_1B_1 проходит через середину отрезка PQ.

Д.Прокопенко

7. В пространстве отмечены 5 точек. Известно, что это центры сфер, четыре из которых попарно касаются извне и касаются изнутри пятой сферы. При этом невозможно определить, какая точка является центром объемлющей сферы. Найдите отношение радиусов наибольшей и наименьшей сферы.

Б.Френкин

8. Даны две окружности, одна из которых лежит внутри другой. Из произвольной точки C внешней окружности проведены касательные к внутренней, вторично пересекающие внешнюю в точках A и B. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников ABC.

А.Заславский

X ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8) Дан прямоугольный треугольник ABC. На катете AB во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник ADB, а на гипотенузе AC во внутреннюю сторону – равносторонний треугольник AEC. Прямые DE и AB пересекаются в точке M. Весь чертеж стерли, оставив только точки A и B. Восстановите точку M.

Н.Москвитин, В.Протасов

2. (8) Есть бумажный квадрат со стороной 2. Можно ли вырезать из него 12-угольник, у которого длины всех сторон равны 1, а все углы кратны $45°$?

К.Кноп

3. (8) Вокруг равнобедренного треугольника ABC с основанием AB описана окружность и в точке B проведена касательная к ней. Из C проведен перпендикуляр CD к касательной, также проведены высоты AE и BF. Докажите, что D, E, F лежат на одной прямой.

Н.Москвитин

4. (8) В треугольник вписан квадрат (две вершины на одной стороне и по одной на остальных). Докажите, что центр вписанной окружности треугольника лежит внутри квадрата.

Б.Френкин

5. (8) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AL и высота AH (H лежит между L и B). При этом $ML = LH = HB$. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

Б.Френкин

6. (8–9) Дана окружность с центром O и не лежащая на ней точка P. Пусть X – произвольная точка окружности, Y – точка пересечения биссектрисы угла POX и серединного перпендикуляра к отрезку PX. Найдите геометрическое место точек Y.

А.Заславский

7. (8–9) Перпендикуляр, восставленный в вершине C параллелограмма $ABCD$ к прямой CD, пересекает в точке F перпендикуляр, опущенный из вершины A на диагональ BD, а перпендикуляр, восставленный из точки B к прямой AB, пересекает в точке E серединный перпендикуляр к отрезку AC. В каком отношении отрезок EF делится стороной BC?

В.Румянцев

8. (8–9) Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, вторая прямая пересекает продолжение стороны CD в точке L. Пусть F – точка пересечения KL и AC. Докажите, что BF перпендикулярно KL.

Р.Садыков

9. (8–9) Окружности ω_1 и ω_2, касающиеся внешним образом в точке L, вписаны в угол BAC. Окружность ω_1 касается луча AB в точке E, а окружность ω_2 – луча AC в точке M. Прямая EL пересекает повторно окружность ω_2 в точке Q. Докажите, что $MQ \parallel AL$.

Д.Швецов

10. (8–9) В угол вписаны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Рассмотрим все пары параллельных прямых l_1 и l_2 таких, что l_1 касается ω_1, l_2 касается ω_2 (ω_1, ω_2 между l_1 и l_2). Докажите, что средние линии всех трапеций, образованных прямыми l_1, l_2 и сторонами данного угла, касаются фиксированной окружности.

М.Кунгожин

11. (8–9) Точки K, L, M и N на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ образуют еще один квадрат. DK пересекает NM в точке E, а KC пересекает LM в точке F. Докажите, что $AF \parallel AB$.

М.Плотников

12. (9–10) Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть K_1 и K_2 – точки на ω_1 и ω_2 такие, что K_1A касается ω_2, а K_2A касается ω_1 соответственно. Описанная окружность треугольника K_1BK_2 пересекает вторично прямые AK_1 и AK_2 в точках L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что точки L_1 и L_2 равноудалены от прямой AB.

И.Макаров

13. (9–10) В окружности ω с центром O фиксирована хорда AC. Точка B движется по дуге AC. Точка P – фиксированная точка хорды AC. Прямая, проходящая через P параллельно AO, пересекает прямую BA в точке A_1; прямая, проходящая через P

параллельно CO, пересекает прямую BC в точке C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BC_1 движется по прямой.

Д.Прокопенко, Д.Швецов

14. (9–11) Постройте подмножество круга, площадью в половину площади круга, такое что его образ при симметрии относительно любого диаметра пересекается с ним по площади, равной четверти круга.

Фольклор

15. (9–11) В неравнобедренном треугольнике ABC высота из вершины A, биссектриса из вершины B и медиана из вершины C пересекаются в одной точке K.

а) Какая из сторон треугольника – средняя по величине?

Б.Френкин

б) Какой из отрезков AK, BK, CK средний по величине?

А.Заславский

16. (9–11) Из некоторой точки D в плоскости треугольника ABC провели прямые, перпендикулярные к отрезкам DA, DB, DC, которые пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

Д.Прокопенко

17. (10–11) Дан прямоугольный треугольник с гипотенузой AC, проведена биссектриса треугольника BD; отмечены середины E и F дуг BD окружностей, описанных около треугольников ADB и CDB соответственно (сами окружности не проведены). Постройте одной линейкой центры окружностей.

Н.Москвитин

18. (10–11) Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к окружности AIC в точках A, C пересекаются в точке X. Касательные к окружности BID в точках B, D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

А.Заславский

19. (10–11) Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке P. Из точки A окружности ω_2, не лежащей на линии центров окружностей, проведены касательные AB, AC к ω_1. Прямые BP, CP вторично пересекают ω_2 в точках E и F. Докажите, что прямая EF, касательная к ω_2 в точке A и общая касательная к окружностям в точке P пересекаются в одной точке.

В.Ясинский

20. (10–11) Дан четырехугольник $KLMN$. Окружность с центром O пересекает его сторону KL в точках A и A_1, сторону LM в точках B и B_1, и т.д. Докажите, что

а) если описанные окружности треугольников KDA, LAB, MBC и NCD пересекаются в одной точке P, то описанные окружности треугольников KD_1A_1, LA_1B_1, MB_1C_1 и NC_1D_1 также пересекаются в одной точке Q;

б) точка O лежит на серединном перпендикуляре к PQ.

Н.Белухов

21. (10–11) В четырехугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке. Окружности, описанные около треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.

Н.Полянский, Д.Скробот

22. (10–11) Существует ли выпуклый многогранник, у которого есть диагонали и любая диагональ меньше любого ребра?

А.Блинков

23. (11) Дана тригармоническая четверка точек A, B, C и D, т.е. такая, что

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC .$$

Пусть A_1 – отличная от A точка такая, что четверка точек A_1, B, C и D тригармоническая. Точки B_1, C_1 и D_1 определяются аналогично. Докажите, что

а) A, B, C_1, D_1 лежат на одной окружности;

б) точки A_1, B_1, C_1, D_1 образуют тригармоническую четверку.

А.Акопян

24. (11) Дана описанная четырехугольная пирамида $ABCDS$. Противоположные стороны основания пересекаются в точках P и Q, причем точки A и B лежат на отрезках PD и PC. Вписанная сфера касается боковых граней ABS и BCS в точках K и L. Докажите, что если прямые PK и QL пересекаются, то точка касания сферы и основания лежит на BD.

Ф.Нилов

Финальный тур

8 класс

1. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1, а гипотенузы – в точке C_1. Прямые C_1A_1 и C_1B_1 пересекают CA и CB в точках B_0 и A_0 соответственно. Докажите, что $AB_0 = BA_0$.

Ю.Зайцева, Д.Швецов

2. Пусть AH_a и BH_b – высоты, а AL_a и BL_b – биссектрисы треугольника ABC. Известно, что $H_aH_b \parallel L_aL_b$. Верно ли, что $AC = BC$?

Б.Френкин

3. В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC – точки M и N соответственно. Угол MAN равен $15°$, а угол BAN равен $45°$. Найдите угол ABM.

А.Блинков

4. Таня вырезала из клетчатой бумаги треугольник, изображенный на рисунке 3. Через некоторое время линии сетки выцвели. Сможет ли Таня их восстановить, не пользуясь никакими инструментами, а только перегибая треугольник (длины сторон треугольника Таня помнит)?

Т.Казицына

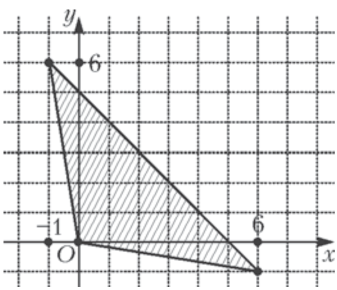


Рис. 3

5. Дан треугольник с углами 30, 70 и 80 градусов. Разрежьте его отрезком на два треугольника так, чтобы биссектриса одного из этих треугольников и медиана второго, проведенные из концов разрезающего отрезка, были параллельны друг другу (достаточно найти одно решение).

А.Шаповалов

6. Две окружности k_1 и k_2 с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке O. Точки X и Y лежат на k_1 и k_2 соответственно так, что лучи O_1X и O_2Y одинаково направлены. Из точки X проведены касательные к k_2, а из точки Y – к k_1. Докажите, что эти четыре прямые касаются одной окружности, проходящей через точку O.

В.Ясинский

7. Две точки окружности соединили ломаной, длина которой меньше диаметра окружности. Докажите, что существует диаметр, не пересекающий эту ломаную.

Фольклор

8. Пусть M – середина хорды AB окружности с центром O. Точка K симметрична M относительно O, P – произвольная точка окружности. Перпендикуляр к AB в точке A и перпендикуляр к PK в точке P пересекаются в точке Q. Точка H – проекция P на AB. Докажите, что прямая QB делит отрезок PH пополам.

Чан Куанг Хюнг

9 класс

1. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник. Докажите, что $AC > BD$ тогда и только тогда, когда $(AD-BC)(AB-CD)>0$.

В.Ясинский

2. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C – прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

Ф.Нилов

3. Дан острый угол A и точка E внутри него. Постройте на сторонах угла точки B, C так, чтобы E была центром окружности Эйлера треугольника ABC.

Е.Диомидов

4. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B, C, проходящие через H, имеют общую касательную.

Махди Этесами Фард, Иран

5. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$, O – центр описанной окружности, BL – биссектриса. Описанная окружность треугольника BOL пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D. Докажите, что $BD \perp AC$.

Д.Швецов

6. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N – середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.

А.Полянский

7. Девять окружностей расположены вокруг произвольного треугольника, как показано на рисунке 4. Окружности, касающиеся одной и той же стороны треугольника, равны между собой. Докажите, что три прямые на рисунке пересекаются в одной точке.

Н.Белухов

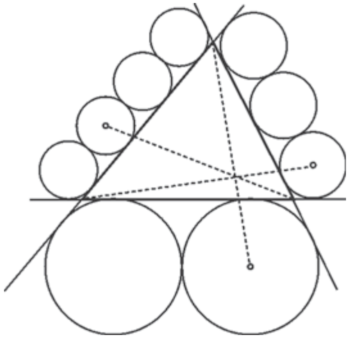


Рис. 4

8. Выпуклый фанерный многоугольник P лежит на деревянном столе. В стол можно вбивать гвозди, которые не должны проходить через P, но могут касаться его границы. *Фиксирующим* назовем набор гвоздей, не позволяющий двигать P по столу. Найдите минимальное количество гвоздей, позволяющее зафиксировать любой выпуклый многоугольник.

Н.Белухов, С.Герджиков, Болгария

10 класс

1. Вершины равнобедренного треугольника и центр его описанной окружности лежат на четырех различных сторонах квадрата. Найдите углы треугольника.

И.Богданов, Б.Френкин

2. Дана окружность, ее хорда AB и W – середина меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности из точки C пересекает касательные из точек A и B в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

А.Зерцалов, Д.Скробот

3. Верно ли, что существуют выпуклые многогранники с любым количеством диагоналей (диагональю называется отрезок, соединяющий две вершины многогранника и не лежащий на его поверхности)?

А.Блинков

4. Дан треугольник ABC и точка D, не совпадающая с вершинами треугольника. Окружность с центром в D, проходящая через A, пересекает прямые AB и AC в точках A_b и A_c соответственно. Аналогично определяются точки B_a, B_c, C_a и

C_b. Сколько может существовать таких точек D, что точки A_b, A_c, B_a, B_c, C_a и C_b лежат на одной окружности?

А.Гаркавый, А.Соколов

5. В треугольнике провели высоту из одной вершины, биссектрису из другой и медиану из третьей, отметили точки их пересечения, а затем все, кроме этих отмеченных точек, стерли. Восстановите треугольник.

А.Заславский

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается AB в точке C'. Окружность с диаметром BC' пересекает вписанную окружность в точке A_1, а биссектрису угла B в точке A_2. Окружность с диаметром AC' пересекает вписанную окружность в точке B_1, а биссектрису угла A в точке B_2. Докажите, что прямые AB, A_1B_1, A_2B_2 пересекаются в одной точке.

Э.Х.Гарсиа, Испания

7. Докажите, что для любого тетраэдра его самый маленький (из шести) двугранный угол не больше, чем двугранный угол правильного тетраэдра.

С.Шлосман, О.Огиевецкий

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Внутри треугольника BCD взяли точку L_a, расстояния от которой до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам. Аналогично внутри треугольников ACD, ABD, ABC взяли точки L_b, L_c, и L_d соответственно. Оказалось, что четырехугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

Н.Белухов

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VI ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. Нет, так как наибольшая сторона треугольника длиннее любой из его высот, медиан или биссектрис. Действительно, любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне, короче, по крайней мере, одной из двух других сторон. Поэтому любая медиана или биссектриса короче хотя бы одной из сторон и, тем самым, короче наибольшей стороны. Тем более это верно для высот.

2. *Первое решение.* Пусть A_2, B_2 C_2 – проекции точек A_1, B_1, I на AB (рис.5). Так как AA_1 – биссектриса, то $AA_2 = AC$. С другой стороны, AC_2 – касательная из A к вписанной окружности треугольника, и, значит, отрезок $A_2C_2 = AA_2 - AC_2$ равен касательной к этой окружности из точки C. Аналогично получаем, что отрезок B_2C_2 равен той же касательной, т.е. C_2 – середина A_2B_2. По теореме Фалеса C_2I пересекает отрезок A_1B_1 в его середине, а так как треугольник CA_1B_1 прямоугольный, эта середина совпадает с центром его описанной окружности.

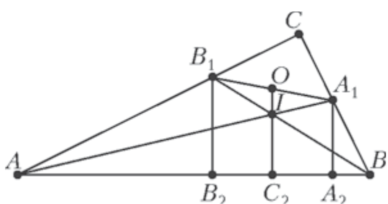


Рис. 5

Второе решение. (Райко Арсений, школа 179, Москва) Обозначим через A_2, B_2 основания перпендикуляров, опущенных из точек A_1, B_1 на гипотенузу AB соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников BCB_1 и BB_2B_1 следует, что $\angle BB_1C = \angle BB_1B_2$. Получаем, что для треугольника AB_1B_2 точка I является центром вневписанной окружности. Следовательно, B_2I – биссектриса прямого угла $B_1B_2A_2$. Такими же рассуждениями показываем, что A_2I является биссектрисой прямого угла $A_1A_2B_2$. Таким образом, треугольник B_2IA_2 – равнобедренный прямоугольный, т.е. точка I лежит на серединном перпендикуляре к A_2B_2. Точка O, будучи серединой боковой стороны B_1A_1 прямоугольной трапеции $B_2B_1A_1A_2$, также обладает этим свойством. Поэтому $OI \perp B_2A_2$.

3. Пусть Y – отличная от C' точка пересечения окружностей $AB'C'$ и $BC'A'$. Тогда, так как $\angle B'YC' = \pi - \angle BAC$ и $\angle C'YA' = \pi - \angle CBA$, то $\angle A'YB' = \pi - \angle ACB$, т.е. Y лежит также на окружности $CA'B'$. Заметим теперь, что

$$\angle AYB = \angle AYC' + \angle C'YB = \angle AB'C' + \angle C'A'B =$$

$$= 2\pi - \angle C'B'C - \angle CA'C' = \angle ACB + \angle A'C'B' = \angle AXB$$

(рис.6). Аналогично, $\angle BYC = \angle BXC$, т.е. точки X и Y совпадают.

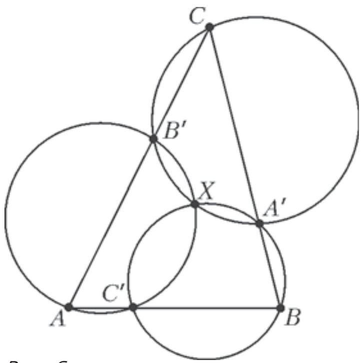


Рис. 6

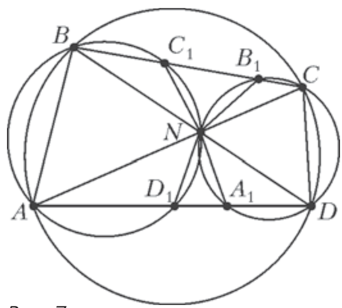


Рис. 7

4. Рассматривая вписанный пятиугольник A_1NB_1CD, получаем, что $A_1N = B_1N$, так как равны опирающиеся на эти дуги углы BDA и BCA. Аналогично, $NC_1 = ND_1$. Кроме того, $\angle NA_1A = \angle ACD = \angle ABD = \angle DD_1N$ (рис.7). Следовательно, $ND_1 = NA_1$, что и требовалось доказать.

5. Прежде всего заметим, что серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC являются средними линиями треугольника AEC и, значит, проходят через F. Таким образом, надо доказать,

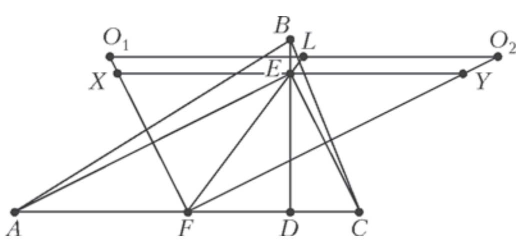


Рис. 8

что FE – медиана треугольника FO_1O_2. При этом $O_1O_2 \parallel AC$, так как оба эти отрезка перпендикулярны BD. Пусть прямая, проходящая через E и параллельная AC, пересекает FO_1 и FO_2 в точках X и Y (рис.8). Так как $FCEX$ и $FAEY$ – параллелограммы, то $XE = FC = FA = EY$. Следовательно, FE – медиана треугольника FXY, а значит, и треугольника FO_1O_2.

6. Так как $\angle BAM + \angle NAC = \angle MAN$ и $AB = AC$, точка, симметричная B относительно AM, совпадает с точкой, симметричной C относительно AN. Обозначим эту точку через L. Тогда $\angle ALM = \angle ABM = \angle ACM$, т.е. L лежит на окружности ACM. Аналогично, L лежит на окружности ABN и, значит, совпадает с K (рис.9). Поэтому $\angle KAN = \angle NAC = 30° - \angle BAM = 90° - \angle NMA$. Но по теореме о вписанном угле прямая, соединяющая A с центром описанной около треугольника AMN окружности, образует с прямой AN такой же угол.

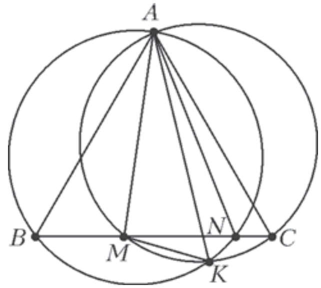


Рис. 9

7. Достроим данный треугольник до параллелограмма $ABCD$ (рис.10). Так как $\angle BKA = \angle DKC = \angle BDA$, точки A, B, K, D лежат на одной окружности и $O_1M \perp BD$. Аналогично, $O_2M \perp BD$. Кроме того, так как треугольники ABD и BCD равны, то равны и расстояния от центров описанных около них окружностей до точки M.

8. Докажем, что треугольник LI_bI_c – равнобедренный и прямоугольный. Пусть L_b, L_c – проекции точек I_b, I_c на BC, а r_b, r_c – радиусы окружностей, вписанных в треугольники AHB, AHC (рис.11).

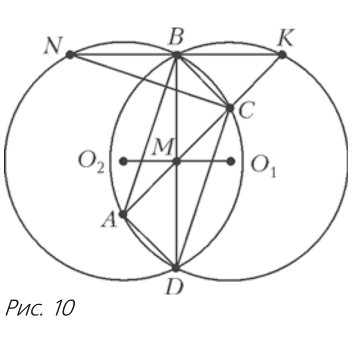


Рис. 10

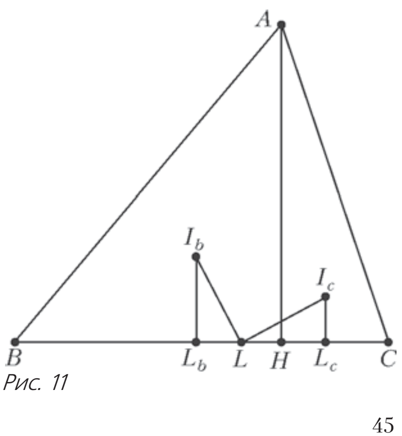


Рис. 11

Так как эти треугольники прямоугольные, то

$$r_b = (AH + BH - AB)/2\,,\ \ r_c = (AH + CH - AC)/2 \ \text{ и}$$

$$r_b - r_c = (BH - CH)/2 - (AB - AC)/2 =$$

$$= (BH - CH)/2 - (BL - CL)/2 = LH\,.$$

Следовательно, $I_bL_b = LI_c = r_b$, $I_cL_c = LI_b = r_c$, т.е. треугольники LI_bL_b и I_cL_cL равны, $LI_b = LI_c$ и $\angle I_bLI_c = 90°$. Соответственно, $\angle LI_bI_c = 45°$.

Замечание. Пусть I_1, I_2 – центры вписанных окружностей треугольников ABD и CBD соответственно (D – произвольная точка на AC); L – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Тогда точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.

9. Так как хорошие точки симметричны относительно высоты треугольника из вершины B, а число их нечетно, то найдется хорошая точка, лежащая на этой высоте. Так как чевиана через эту точку из вершины A не короче высоты из той же вершины, высота треугольника из A не длиннее, чем из B, т.е. $AC \le AB$. Более того, AC не может быть длиннее высоты из B, так как иначе на этой высоте было бы две хороших точки. Предположим теперь, что некоторая хорошая точка не лежит на высоте. Пусть AA', BB', CC' – проходящие через нее чевианы, а AA_1, CC_1 – высоты треугольника. Тогда $A_1A' = C_1C'$, причем одна из точек A', C' лежит между основанием соответствующей высоты и точкой B, а другая – нет. Но отсюда следует, что соответствующие чевианы короче AC и тем более короче BB_1 – противоречие. Значит, хорошая точка только одна.

10. Проведем прямые a, b, c, параллельные BC, CA, AB и лежащие от них на расстоянии ширины линейки с внешней стороны треугольника. Прямые a, b, BC, AC образуют ромб, диагональ которого является биссектрисой угла C. Пусть E – точка пересечения этой биссектрисы с прямой c, а F – точка пересечения диагоналей трапеции, образованной прямыми c, AB, AC и BC (рис.12). Тогда прямая EF пересекает AB в искомой точке D.

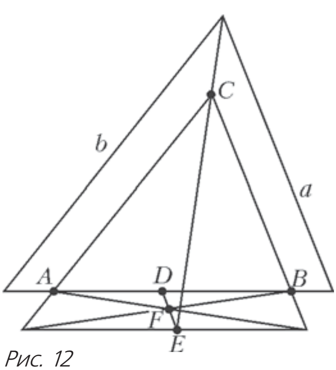


Рис. 12

11. $n = 4$ или $n = 5$.

Очевидно, $n > 3$. Предположим, что $n > 5$. Тогда одна из частей n-угольника имеет не менее $n + 1$ стороны, вторая – n, третья – не менее 3. При соединении этих частей либо три пары сторон соединяются внутри многоугольника и не более трех пар образуют его стороны, либо две пары соединяются внутри и не более четырех образуют стороны. В любом случае суммарное количество сторон частей превосходит n не более чем на 9, что при $n > 5$ невозможно. Примеры для $n = 4$, 5 показаны на рисунке 13.

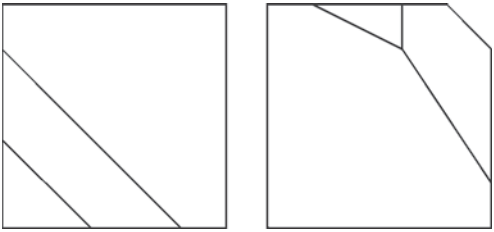


Рис. 13

12. а) *Первое решение*. Проведем высоту HN к основанию равнобедренного треугольника CHM, тогда $CN = NM$. Так как $BH = B'H$ и $NH \parallel BC$, то прямая, проходящая через точку B' параллельно HN, пересечет AC в точке M (по теореме Фалеса).

Второе решение. Имеем $\angle CMH = \angle MCH = \angle CBB' = \angle CB'B = a$, поэтому точки C, H, B' и M лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle CB'M = \angle CHM = 180° - 2a$, тогда $\angle AB'M = a$, что и требовалось.

б) Из прямоугольного треугольника ABC: $CH^2 = AH \cdot BH$. Так как $B'H = BH$ и $KH = CH$, то $KH^2 = AH \cdot B'H$, т.е. треугольники AKH и $AB'K$ подобны, откуда и вытекает утверждение задачи.

13. Возьмем на BD такую точку L, что $\angle ALB = \angle A$. Так как треугольники ABL и DBA подобны, $BL \cdot BD = AB^2 = BC^2$. Значит, треугольники CBL и DBC тоже подобны, т.е. $\angle BLC = \angle C$ и L совпадает с K. Требуемое равенство, очевидно, следует из указанных подобий.

14. Так как $\angle ABM = \angle BMC = \angle MCD$, то $S_{ABM}/S_{BMC} = AB/MC$ и $S_{BMC}/S_{CMD} = BM/CD$. Но треугольники ABM и MCD подобны, так что эти отношения равны и $S_{BMC}^2 = S_{ABM} \cdot S_{MCD}$. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $S_{BMC} \le (S_{ABM} + S_{MCD})/2$, что равносильно утверждению задачи.

15. а) Треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC с коэффициентами $\cos\angle A$, $\cos\angle B$, $\cos\angle C$

соответственно. Поэтому $\angle KA_1C_1 = \angle KA_1B_1 = 90° - \angle A$, и по теореме синусов диаметры описанных окружностей треугольников AKB_1 и A_1KC_1 равны соответственно $B_1K/\cos\angle A$ и $C_1K/\cos\angle A$. Следовательно, их сумма равна $B_1C_1/\cos\angle A = BC$.

б) Доказанное в предыдущем пункте равенство можно переписать в виде

$$\frac{A_1N}{\sin\angle B} + \frac{A_1L}{\sin\angle C} = BC .$$

Разделив его на BC, получим искомое соотношение.

16. *Первое решение.* Прежде всего заметим, что $\angle BCD = \angle ECX$, так как соответствующие дуги заключены между параллельными хордами. Кроме того, из равенства углов ABD и AEB следует подобие треугольников ABD и AEB и, значит, равенство $BD/BE = AD/AB$. Аналогично, получаем, что $CD/CE = AD/AB$, т.е. $BD \cdot CE = CD \cdot BE = BC \cdot DE/2$ (последнее равенство следует из теоремы Птолемея).

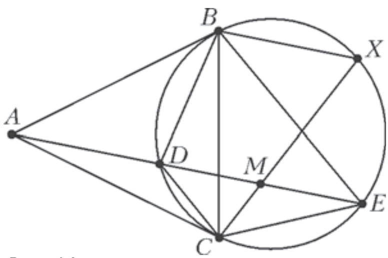


Рис. 14

Пусть теперь CX пересекает DE в точке M (рис.14). Тогда треугольники CBD и CME подобны, следовательно, $BD \cdot CE = CB \cdot EM$. Отсюда и из предыдущего равенства получаем, что $EM = ED/2$.

Второе решение. (Руденко Александр, лицей 171 «Лидер», Киев) Заметим, что $\angle DMC = \frac{1}{2}(\cup DC + \cup XE)$. По условию $DE \parallel BX \Rightarrow \cup BD = \cup EX$. С другой стороны,

$$\angle COB = \cup CB = \cup CD + \cup DB = \cup CD + \cup EX = 2\angle CMD .$$

Откуда следует, что $\angle COA = \frac{1}{2}\angle COB = \angle CMD$, поэтому точки A, C, M, O лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle AMO = \angle ACO = 90°$, т.е. $MO \perp DE \Rightarrow DM = ME$.

17. *Первое решение.* Пусть $l = CL$, $h = CH$ − биссектриса и высота из вершины C, $m = BM$ − медиана из вершины B, φ − угол, который в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины l противолежит катету длины h. Через p обозначим прямую, содержащую точку C и параллельную прямой AB, а через B' − точку, симметричную точке B относительно прямой p.

Предположим, что треугольник ABC построен. Тогда выполнено хотя бы одно из равенств $\angle CLB = \varphi$ или $\angle CLB = 180° - \varphi$, и в любом случае имеем $\angle B'CM = 2\varphi$. В самом деле, если, например, $\angle CLB = \varphi$, то $\angle B'CM = 360° - 2\angle CBA - \angle BCA = 2(180° - \angle CBA - \angle BCL) = 2\varphi$ (рис.15). Второй случай разбирается аналогично.

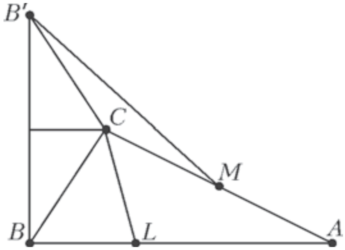


Рис. 15

Итак, отрезок $B'M$ виден из точки C под углом 2φ. Отсюда получаем следующее построение.

Проведем две параллельные прямые на расстоянии h друг от друга и отметим на одной из них точку B; другая прямая будет прямой p. Далее отмечаем точку B', а затем – точку M, удаленную на расстояние m от B и равноудаленную от параллельных прямых. Построив угол φ, строим две дуги окружностей с концами в точках B' и M и угловой величиной $360° - 4\varphi$.

Если C_1 и C_2 – точки пересечения дуг с прямой p, а A_i ($i = 1, 2$) – точка, симметричная C_i относительно M, то каждый из треугольников A_1BC_1 и A_2BC_2 является искомым.

Действительно, высоты этих треугольников, проведенные из вершин C_1, C_2, равны h, а отрезок $BM = m$ является в каждом из них медианой. Кроме того, если L_1, L_2 – основания соответствующих биссектрис, то из построения следует, что один из углов C_1L_1B и C_2L_2B равен φ, а другой $180° - \varphi$, откуда, в силу определения угла φ, получаем $C_1L_1 = C_2L_2 = l$.

Примечание 1. Ясно, что если $l < h$ или $m < h/2$, то решений нет. Если $l = h$ и $m \geq h/2$, решением является единственный равнобедренный треугольник (при $m = h/2$ вырождающийся в отрезок). В случае, когда $l > h$ и $m = h/2$, получаем два равных треугольника, симметричных относительно прямой BB'.

При $l > h$ и $m = l/2$ один из построенных треугольников оказывается вырожденным, так что решение единственно. Во всех остальных случаях задача имеет два решения.

Второе решение. Зная высоту и биссектрису из вершины C, можно построить эту вершину и прямую AB. Рассмотрим теперь следующее отображение этой прямой в себя. Для произвольной точки X найдем точку Y, удаленную от X и AB на расстояния, равные данной медиане из вершины B и половине данной высоты (рис.16). Затем отразим прямую CY относительно биссектрисы и найдем точку X' пересечения полученной прямой с AB.

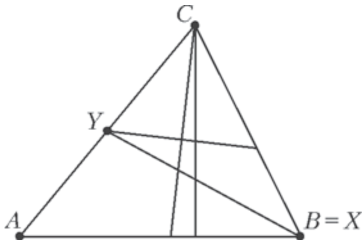


Рис. 16

Очевидно, что это отображение сохраняет двойные отношения точек и переводит точку B в себя. Таким образом, задача сводится к известной задаче построения неподвижной точки проективного преобразования прямой.

Примечание 2. В 1938 г. в журнале «Математика в школе» была напечатана статья В.Фурсенко, в которой разбирались все задачи на построение треугольника по трем элементам. Эта задача там была ошибочно названа неразрешимой.

18. Так как углы ADB и BEC прямые, точки D и E лежат на окружности с диаметром BG. При этом $\angle FDG = \angle ADO_1 = \angle DAC = \angle GED$. Следовательно, FD (и аналогично FE) − касательная к этой окружности (рис.17). Значит, эта прямая симметрична медиане треугольника GED из вершины G относительно биссектрисы из этой же вершины. Поскольку треугольник GDE подобен треугольнику GCA, в этом последнем треугольнике данная прямая будет медианой.

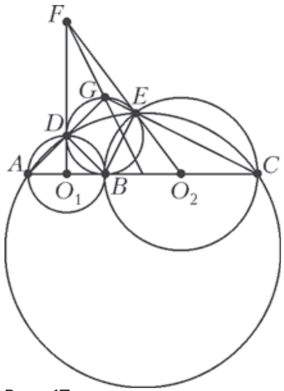


Рис. 17

19. Достаточно доказать, что $XO = OY$. Действительно, тогда аналогично получим, что $UO = OV$ и, значит, $XUYV$ − параллелограмм.

Пусть прямая EO пересекает окружность в точках P и Q (рис.18). Искомое равенство равносильно равенству двойных отношений $(PX; OY) = (QY; OX)$. Спроецировав прямую EO на окружность из точки C, получим эквивалентное равенство $(PA; C'B) = (QB; C'A)$, которое верно, так как прямые PQ, AB и касательная к окружности в точке C' пересекаются в одной точке.

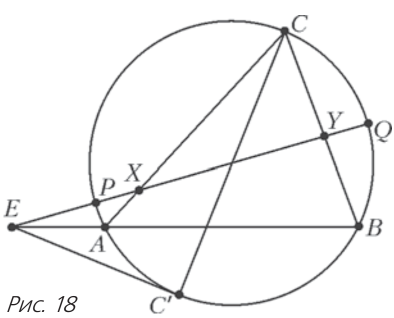


Рис. 18

20. Достаточно доказать, что $\angle CAP = \angle A'AP$. Действительно, это означает, что прямая AA' симметрична AP относительно биссектрисы угла A. Тогда аналогично BB' симметрична BP относительно биссектрисы угла B, а значит, точка пересечения этих прямых лежит на прямой, симметричной CP относительно биссектрисы угла C, т.е. на высоте треугольника.

Пусть Q – точка пересечения прямой AP с окружностью, S – середина дуги B_1C_1 (рис.19). Композиция проекций окружности на себя из точек A и A_2 меняет местами точки B_1 и C_1, переводит Q в A' и оставляет S на месте. Значит, $(B_1Q; SC_1) = (C_1A'; SB_1)$, т.е. точки A' и Q симметричны относительно прямой AA_2, что равносильно искомому равенству.

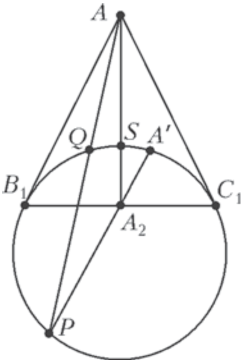


Рис. 19

21. Если бы стороны AB и CD были параллельны, то выполнялись бы равенства $\angle ABD = \angle BDC$ и $\angle ACD = \angle BAC$. Поэтому условие задачи равносильно тому, что лучи AB и DC пересекаются, т.е. расстояние от C до прямой AB меньше, чем от D, а расстояние от B до прямой CD меньше, чем от A. Поэтому $S_{ABD} > S_{ABC}$ и $S_{ACD} > S_{BCD}$.

22. Возьмем произвольную точку окружности A, лежащую вне параболы. Так как прямая AF и прямая, проходящая через A и параллельная оси параболы, вторично пересекают окружность в точках, симметричных относительно оси, касательные из A к параболе также пересекают окружность в точках B и D, симметричных относительно оси. Аналогично получаем, что вторые касательные из B и D вторично пересекают окружность в точке C, симметричной A. Следовательно, A, B, C, D – искомые точки.

23. Пусть P – точка пересечения FC и AD; G – вторая точка пересечения описанной окружности шестиугольника с прямой BP. Тогда $2 = (AC; BF) = (DF; GB) = (DF; EB)$, и, следовательно, точки G и F совпадают.

24. Пусть плоскость, проходящая через A и перпендикулярная l, пересекает l в точке B, а C – проекция Y на эту плоскость. Так как $BC \parallel XY$, то $BC \perp AY$ и по теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AC$. Следовательно, C лежит на окружности с диаметром AB, а Y – на цилиндре, образующие которого проходят через точки этой окружности. Очевидно, что любая точка цилиндра принадлежит искомому ГМТ.

25. Заметим, что ни один из икосаэдров не может содержать четырех вершин октаэдра. Действительно, среди четырех вершин октаэдра обязательно найдутся две противоположные, а любая из остальных вершин образует с ними равнобедренный прямоугольный треугольник. Но среди вершин икосаэдра нельзя выбрать три вершины такого треугольника.

Таким образом, одному из данных икосаэдров принадлежат три вершины одной грани октаэдра, а другому – три вершины противоположной грани. Заметим теперь, что между вершинами икосаэдра существуют только три различных расстояния: одно равно ребру икосаэдра, другое – диагонали правильного пятиугольника со стороной, равной ребру, третье – расстоянию между противоположными вершинами. При этом правильный треугольник могут образовывать только вершины с расстояниями первых двух видов. Так как икосаэдры неравны, то для одного из них грань октаэдра совпадает с гранью, а для другого с треугольником, образованным диагоналями. Следовательно, отношение ребер равно отношению диагонали правильного пятиугольника к его стороне, т.е. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Финальный тур

8 класс

1. Обозначим через I точку пересечения биссектрис, а через X и Y – точки пересечения высоты с биссектрисами углов B и C соответственно (рис.20). Пусть для определенности $AB > AC$; тогда точки I и Y лежат на отрезках BY и AX соответственно. Значит, $\angle AIY = \angle A/2 + \angle B/2 = 90° - \angle C/2 = \angle IXY$, откуда (по теореме об угле между касательной и хордой) сразу следует утверждение задачи.

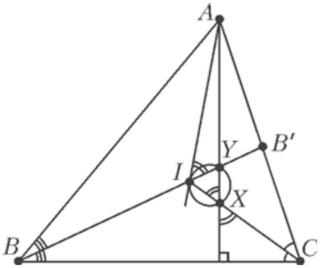


Рис. 20

2. Обозначим искомое ГМТ через Φ. Очевидно, что Φ пусто при $AB > 2$, а при $AB = 2$ является кругом с диаметром AB. Пусть $AB < 2$, а окружности ω_A, ω_B с центрами A, B и радиусами, равными 1, пересекаются в точках P и Q. Рассмотрим круги единичного радиуса, покрывающие точки A и B; ГМТ их центров есть «линза», образованная дугами PQ окружностей ω_A и ω_B. Значит, Φ есть объединение кругов единичного радиуса с центрами в этой линзе.

Построим точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 такие, что P − середина отрезков AP_1, BP_2, а Q − середина отрезков AQ_1, BQ_2, и проведем четыре дуги окружностей: P_1Q_1 с центром A и радиусом 2, P_2Q_2 с центром B и радиусом 2, P_1P_2 с центром P и радиусом 1, Q_1Q_2 с центром Q и радиусом 1 (рис.21). Докажем, что Φ есть фигура, ограниченная этими дугами. Ясно, что любая точка X этой фигуры принадлежит Φ. В самом деле, если X лежит в секторе P_1PP_2, то она лежит в круге с центром P; если же она лежит в секторе P_1AQ_1, то она лежит в круге с центром Y, где Y − точка пересечения луча AX и дуги PQ окружности ω_1. Остальные случаи аналогичны.

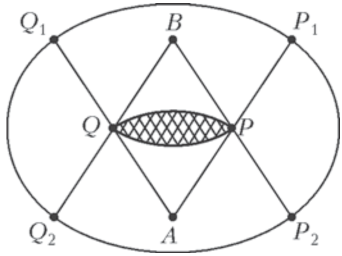


Рис. 21

Осталось показать, что любая точка X вне нашей фигуры не принадлежат Φ. Если X лежит в угле P_1AQ_1, то $AX > 2$, и точки A и X не накрываются единичным кругом. Пусть теперь X лежит в угле P_1PP_2; нам надо доказать, что расстояние от X до любой точки Y, лежащей в линзе, больше 1. Для этого покажем, что $\angle XPY \geq 90^\circ$ (и, следовательно, $XY \geq XP > 1$). Пусть для определенности в угле XPY лежит точка P_1 (рис.22); тогда $\angle XPY \geq \angle P_1PY$. С другой стороны, $AY \leq 1$, а $AP_1 = 2$, откуда $P_1Y \geq 1 \geq AY$. Это и означает, что точки A и Y лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к AP_1, т.е. $90^\circ \leq P_1PY \leq \angle XPY$.

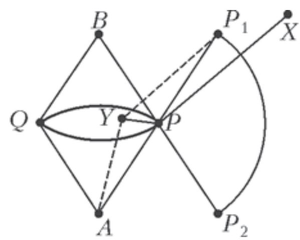


Рис. 22

3. Поскольку прямые BP и CP являются медианами треугольников ABC и BCD, то точки A и C равноудалены от BP, а B и D − от CP (рис.23). Это значит, что $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCD}$. С другой стороны, высоты треугольников PAB и PCD из точки P равны, так как P

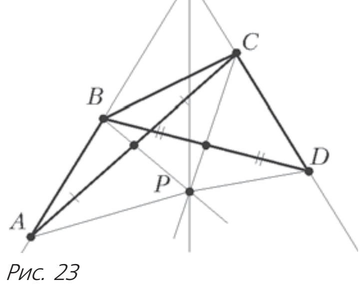


Рис. 23

лежит на биссектрисе; значит, равны и их основания, что и требовалось доказать.

4. Можно считать, что $OA_2 > OA_1$ (рис.24). Треугольники OA_1B_2 и OB_1A_2 равны по двум сторонам и углу между ними,

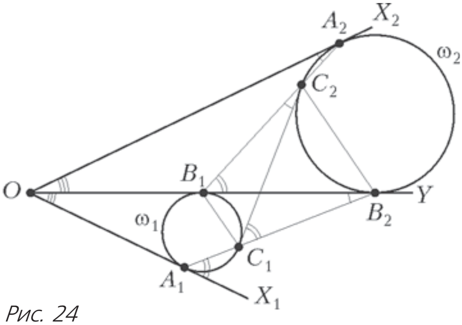


Рис. 24

значит, $\angle OB_2A_1 = \angle OA_2B_1$ и $\angle OA_1B_2 = \angle OB_1A_2$. Далее, из равенства $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2 = \varphi$ следует, что $\angle A_1C_1B_1 = 90° - \varphi/2 = 180° - (90° + \varphi/2) = 180° - \angle A_2C_2B_2$. Следовательно, четырехугольник $B_2C_2B_1C_1$ вписан, поэтому $\angle B_1C_2C_1 = \angle B_1B_2C_1 = \angle OA_2B_1$. Наконец, поскольку прямые C_1C_2 и OA_2 образуют равные углы с хордой A_2C_2 окружности ω_2, а OA_2 – касательная, то и C_1C_2 – также касательная. Касание C_1C_2 и ω_1 доказывается аналогично.

Замечание. Другое решение можно получить, заметив, что из равенства треугольников OA_1B_2 и OA_2B_1 следует $A_1B_2 = A_2B_1$, а затем, применив теорему о секущей и касательной: $B_1C_2 \cdot B_1A_2 = B_1B_2^2 = B_2C_1 \cdot B_2A_1$, откуда $B_2C_1 = B_1C_2$. Теперь, поскольку четырехугольник $B_1C_2B_2C_1$ вписан, он является равнобокой трапецией и, следовательно, симметричен относительно линии центров наших окружностей.

5. Так как $AH \perp LM$, то $LM \parallel BC$, т.е. LM – средняя линия треугольника. Значит, BL – биссектриса и медиана треугольника ABC, т.е. $AB = BC$. Поскольку BL является биссектрисой углов ABC и HLM, точки H и M симметричны относительно нее; значит, $\frac{1}{2}AB = BM = BH = \frac{1}{2}BC$, и высота AH является медианой треугольника ABC. Таким образом, $AC = AB = BC$, треугольник ABC – равносторонний, и из симметрии CM делит HL пополам, что и требовалось доказать.

6. *Первое решение.* Заметим, что прямые AE и BF перпендикулярны, поскольку получаются друг из друга поворотом на 90°

вокруг центра квадрата. Пусть прямая, проходящая через A и параллельная BF, пересекает прямую CD в точке G. Так как $ABFG$ – параллелограмм, то $FG = AB$ и, значит, $FD = DG$. По теореме Фалеса прямая, проходящая через D и параллельная BF, является медианой треугольника ADP. Поскольку $AE \perp BF$, эта прямая является и высотой (рис.25). Следовательно, треугольник ADP – равнобедренный, как и треугольник AED. Угол EAD в обоих треугольниках является углом при основании, поэтому углы при вершинах также равны.

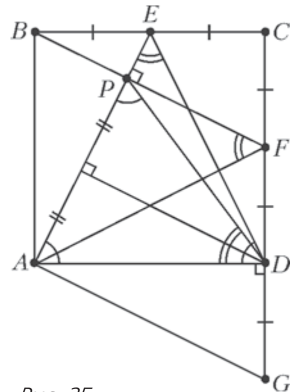


Рис. 25

Второе решение. Опять же заметим, что $\angle APF = 90° = \angle ADF$. Значит, четырехугольник $APFD$ вписан, откуда $\angle ADP = \angle AFP = \angle AFB$. С другой стороны, $\angle AFB = \angle AED$, поскольку треугольники ABF и ADE равны.

Третье решение. Пусть $AB = 1$. Поскольку BP – высота прямоугольного треугольника с катетами 1 и $\frac{1}{2}$, получаем $AP : PE = 4 : 1$. Тогда по теореме Фалеса проекция отрезка DP на CD равна $\frac{4}{5}$. Аналогично получаем, что его проекция на AD равна $\frac{3}{5}$. Значит, по теореме Пифагора $DP = 1 = AD$. Дальнейшие рассуждения такие же, как в первом решении.

7. Да, может; 3 или 4 стороны.

Примеры, как может получиться правильный треугольник или квадрат, приведены на рисунке 26. Предположим, что у полученного многоугольника M хотя бы 5 сторон. Разрез пересекает его по двум точкам, каждая из которых принадлежит максимум двум сторонам. Значит, у M есть сторона AB, не имеющая общих точек (даже вершин) с разрезом. Пусть она лежит в куске, полученном из P; тогда сторона P равна AB, и углы при ней равны углам многоугольника M. Поскольку правильный многоугольник однозначно задается стороной и углом при ней, то $P = M$, что невозможно.

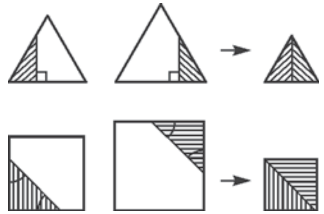


Рис. 26

8. Нет, не обязательно.

Покажем, что условию задачи удовлетворяет любой треугольник с $\angle C = 120°$. Пусть CC_1 – биссектриса угла C. Тогда CA_1 – внешняя биссектриса угла ACC_1, т.е. точка A_1 равноудалена от прямых AC и CC_1. Но она также равноудалена от прямых AC и AB, поэтому C_1A_1 – биссектриса угла CC_1B.

Значит, точка J, симметричная I относительно C_1A_1, лежит на прямой AB (рис.27). Заметим, что

$$\angle AA_1C_1 = \angle A_1C_1B - \angle A_1AB = \frac{1}{2}(\angle CC_1B - \angle CAB) = \frac{1}{2}ACC_1 = 30°,$$

откуда

$$\angle IA_1J = 2\angle AA_1C = 60°.$$

Итого, в равнобедренном треугольнике IA_1J ($IA_1 = A_1J$) угол равен $60°$; значит, он равносторонний, $IJ = JA_1$, и потому

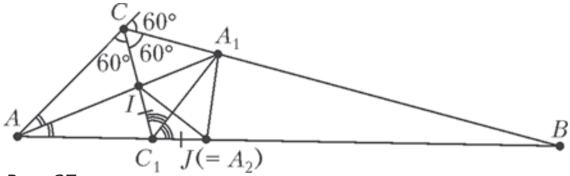


Рис. 27

$A_2 = J$. Таким образом, мы получили, что $A_2C_1 = JC_1 = IC_1$. Аналогично получаем $A_2C_1 = JC_1 = IC_1$, что и требовалось доказать.

Замечание. Можно показать, что в треугольнике, удовлетворяющем условию задачи, обязательно либо $AC = BC$, либо $\angle C = 120°$.

9 класс

1. $60°$.

Нетрудно посчитать, что угол между биссектрисой и высотой в вершине X треугольника XYZ равен $\frac{1}{2}|\angle Y - \angle Z|$. Следовательно, если эти углы в вершинах A и B треугольника ABC равны, то $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ или $\angle A - \angle C = \angle C - \angle B$. В первом случае треугольник равнобедренный, т.е. высота и биссектриса из вершины C совпадают, что противоречит условию. Во втором случае

$$\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{1}{2}(180° - \angle C) = 60°.$$

Замечание. Условие задачи выполняется в любом неравностороннем треугольнике с $\angle C = 60^\circ$.

2. Очевидно, что, если одна из описанных окружностей лежит внутри другой, то утверждение задачи выполнено, а если каждая из окружностей лежит вне другой, то треугольники не могут пересекаться. Поэтому будем считать, что описанные окружности треугольников пересекаются в точках P и Q (возможно, совпадающих), и предположим, что утверждение задачи не выполняется. Тогда вершины каждого из треугольников лежат на дуге PQ соответствующей окружности, расположенной вне другой окружности. Но эти дуги лежат по разные стороны от прямой PQ. Значит, сами треугольники тоже лежат по разные стороны от этой прямой и не могут пересекаться. (В случае, если $P = Q$, в качестве прямой PQ рассматривается общая касательная к окружностям.)

3. Через $\angle(k, l)$ будем обозначать направленный угол между прямыми k и l (считающийся против часовой стрелки).

При повороте на 60° по часовой стрелке вокруг B точки A и C переходят соответственно в X и Y (рис.28). Следовательно, $\angle(XY, AC) = 60^\circ$.

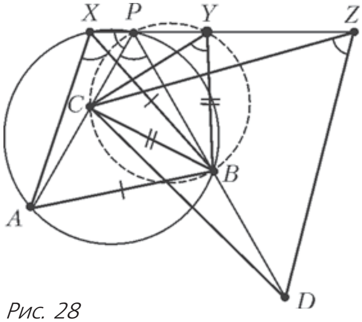


Рис. 28

Пусть P – точка пересечения прямых XY и AC. Тогда

$$\angle(XP, AP) = 60^\circ = \angle(XB, AB),$$

т.е. точки A, X, P, B лежат на одной окружности. Отсюда

$$\angle(CP, PB) = \angle(AX, XB) = 60^\circ = \angle(CY, YB),$$

т.е. точки B, C, P, Y также лежат на одной окружности. Таким образом, точка P является второй точкой пересечения прямой XZ и описанной окружности треугольника BCY. Аналогично показывается, что прямая BD также проходит через эту точку. (В случае, если эти окружность и прямая касаются, получаем $P = Y$, и все три прямые проходят через Y.)

4. *Первое решение.* Обозначим через C' точку касания вписанной окружности со стороной AB. Сделаем инверсию с центром в точке B'. Будем обозначать образы точек индексами «1», т.е. образом точки A' будет A_1' и т.п. Тогда образами прямых AB и BC будут окружности A_1B_1B' и C_1B_1B', а образом

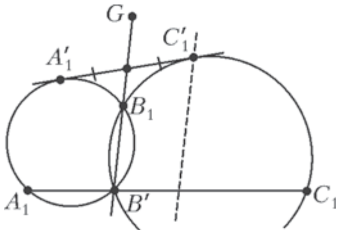


Рис. 29

вписанной окружности – прямая $A_1'C_1'$, касающаяся обеих окружностей (рис.29). Далее, радикальная ось $B'B_1$ этих окружностей, содержащая точку G_1, делит отрезок $A_1'C_1'$ пополам.

Отсюда вытекает построение. Построим l_1 – образ прямой $B'G$ (на которой лежит B_1) при гомотетии с центром A_1' и коэффициентом 2; эта прямая содержит C_1'. Значит, ее инверсный образ содержит точку C'. Проведя аналогичное построение, начиная с инверсии в точке A', получим вторую окружность, содержащую C' и, значит, сможем восстановить точку C' (вообще говоря, двумя способами). После этого восстанавливается описанная окружность треугольника $A'B'C'$ и стороны исходного треугольника, являющиеся касательными к ней.

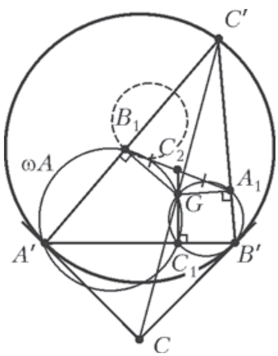


Рис. 30

Второе решение. Пусть C' – точка касания вписанной окружности со стороной AB, A_1, B_1, C_1 – проекции G на стороны треугольника $A'B'C'$ (рис.30). Заметим, что

$$\frac{GB_1}{GA_1} = \frac{\rho(C, A'C')}{\rho(C, B'C')} = \frac{CA'\sin\angle CA'C'}{CB'\sin\angle CB'C'} = \frac{\sin\angle A'B'C'}{\sin\angle B'A'C'},$$

т.е.

$$GB_1\sin\angle B'A'C' = GA_1\sin\angle A'B'C'.$$

Это означает, что проекции отрезков GA_1 и GB_1 на прямую $A'B'$ равны, и C_1G является медианой в треугольнике $A_1B_1C_1$. Аналогично, A_1G также является медианой в этом треугольнике, т.е. G – его центр тяжести.

Отсюда получаем искомое построение. Построим точку C_1 и ее образ C_2 при гомотетии с центром G и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ (таким образом, C_2 – середина A_1B_1). Далее построим окружности ω_A, ω_B с диаметрами GA', GB' и найдем точку пересечения окружности ω_A с окружностью, симметричной ω_B относительно C_2; мы получили точку B_1 (опять же, вообще говоря, двумя способами). Точка A_1 симметрична ей относительно C_2. Теперь можно восстановить прямые $A'C'$ и $B'C'$ как перпендикуляры к GA_1 и GB_1 в точках A_1 и B_1; дальнейшее ясно.

Замечание. В первом абзаце по сути доказывается, что точка Лемуана G (треугольника $A'B'C'$) является центром тяжести своего педального треугольника $A_1B_1C_1$.

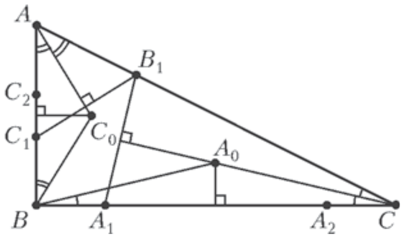


Рис. 31

5. Поскольку точки A_1 и A_2 симметричны относительно середины отрезка BC, то $A_0B = A_0C$ (рис.31). С другой стороны, A_0 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1, который совпадает с биссектрисой угла C. Следовательно,

$$\angle CBA_0 = \angle A_0CB = \frac{1}{2}\angle C .$$

Аналогично,

$$ABC_0 = \frac{1}{2}\angle A ,$$

и, значит,

$$\angle A_0BC_0 = \angle C - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 45° .$$

6. Пусть угол C – острый. Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMK. Так как $\angle AMK = \angle AMB = \angle C$, то $\angle AOK = 2\angle C$ и $\angle OKA = \angle OAC = 90° - \angle C$, т.е. этот угол не зависит от положения точек K, M (рис.32). Следовательно, все центры лежат на одной прямой. Более того, поскольку все прямые KO при различных положениях точки K параллельны друг другу, то, когда точка K пробегает отрезок AC, точка O пробегает боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием AC и углом при основании $90° - \angle C$ (этот треугольник и точка B лежат в разных полуплоскостях относительно AC).

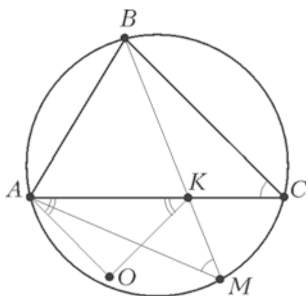


Рис. 32

Если угол C тупой, то рассуждения аналогичны; получается боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при основании $\angle C - 90°$, лежащего по ту же сторону от AC, что и B.

7. *Первое решение.* Известно, что описанная окружность треугольника AL_aM_a перпендикулярна описанной окружности Ω треугольника ABC и является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = BA : CA$. Окружность ω_a симметрична ее относительно серединного перпендикуляра к BC; поэтому ω_a также перпендикулярна Ω и является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = CA : BA$. Аналогичный факт верен и для ω_b. Значит, множество общих точек ω_a и ω_b переходит в себя при инверсии относительно Ω; поэтому они касаются тогда и только тогда, когда некоторая их общая точка X лежит на Ω; при этом $AX : BX : CX = BC : CA : AB$.

Итак, если окружности касаются, то по теореме Птолемея одно из произведений $AX \cdot BC$, $BX \cdot CA$, $CX \cdot AB$ равно сумме двух других. Так как эти произведения пропорциональны квадратам сторон треугольника ABC, он должен быть прямоугольным.

Наоборот, пусть треугольник ABC прямоугольный, и точки A, B, C, X (в некотором порядке) образуют прямоугольник. Тогда эти точки лежат на одной окружности, и нетрудно убедиться, что $AX : BX : CX = BC : CA : AB$; это значит, что X – общая точка ω_a и ω_b, а это равносильно тому, что они касаются.

Второе решение. Опять же напомним, что описанная окружность треугольника AL_aM_a является геометрическим местом точек X, для которых $BX : CX = BA : CA$, а ее центр O_a лежит на касательной к Ω в точке A. Кроме того, известно, что точки O_a, O_b, O_c лежат на одной прямой. Получаем, что центр O'_a окружности ω_a симметричен O_a относительно середины BC, а ее радиус равен длине касательной O'_aA', проведенной из O'_a к Ω (точка A' симметрична к A относительно серединного перпендикуляра к BC).

Далее, точка X пересечения двух из окружностей ω_a, ω_b, ω_c удовлетворяет соотношениям $AX : BX : CX = BC : CA : AB$, т.е. лежит и на третьей окружности. Значит, если две из окружностей ω_a, ω_b, ω_c касаются в точке X, то третья также проходит через эту точку и касается их обеих (ибо больше не имеет с ними общих точек).

Это замечание позволяет ограничиться случаем, когда C – наибольший угол треугольника ABC. Если $\angle C = 90°$, то касательные из точек O'_a и O'_b к Ω касаются ее в одной и той же точке $A' = B'$, диаметрально противоположной C (рис.33). Значит, точки O'_a, O'_b, A' лежат на одной прямой и, следовательно, окружности с центрами O'_a, O'_b, проходящие через A', касаются в ней.

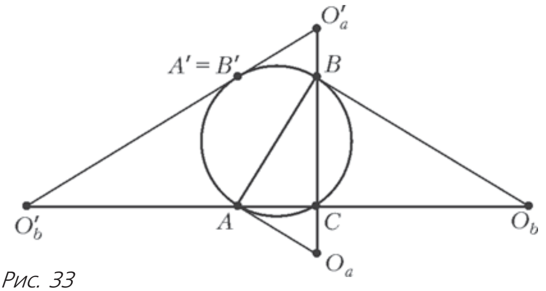


Рис. 33

Пусть угол C острый; проведем вторые касательные из точек O'_a и O'_b к Ω; тогда точки касания будут расположены так, как на рисунке 34, и, следовательно, дуги $B'B''$ и $C'C''$ окружностей

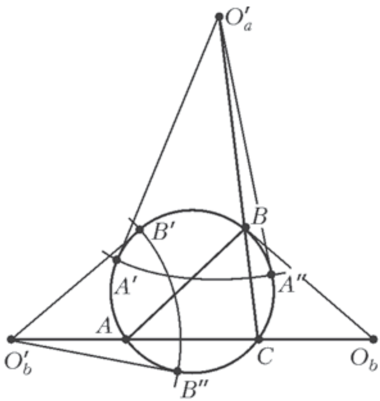


Рис. 34

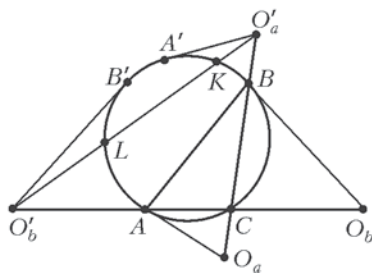


Рис. 35

ω_a и ω_b пересекутся. Наконец, если угол C тупой (рис.35), то отрезок $O'_aO'_b$ пересекает Ω в двух точках K и L; тогда

$$O_aA' + O_bB' = \sqrt{O_aK \cdot O_aL} + \sqrt{O_bK \cdot O_bL} <$$

$$< \frac{O_aK + O_aL}{2} + \frac{O_bK + O_bL}{2} = O_aO_b\ ;$$

значит, сумма радиусов меньше расстояния между центрами, и окружности не имеют общих точек.

8. $k = 5$.

Докажем сначала, что пяти точек достаточно. Пусть A, B, C, D – четыре последовательные вершины многоугольника (возможно, $A = D$). Отметим точки A, B, произвольную точку X на стороне AB, точку Y на стороне BC, достаточно близкую к B, и точку Z на стороне CD, достаточно близкую к C.

Пусть P – исходный многоугольник, Q – некоторый правильный многоугольник, содержащий на периметре наши пять точек, α и β – углы этих многоугольников. Прямая AB должна содержать сторону многоугольника Q, так как на ней лежат три отмеченных точки. Пусть эта сторона – $A'B'$ (рис.36). Далее, пусть сторона Q, содержащая Y, лежит на прямой l; тогда точки B и Z должны лежать по одну сторону от нее. Поскольку Z близка к C, это означает, что угол между прямыми l и BC мал. С другой стороны, $\alpha = \angle ABY \geq \angle A'B'Y \geq \beta$, т.е. количество сторон у Q не больше, чем у P. Значит, угол между l и BC может быть достаточно мал лишь тогда, когда эти прямые совпадают. Итак, прямая BC также содержит сторону Q, а точка B тогда является его вершиной. Отсюда следует, что P и Q гомотетичны с центром в точке B, и контур Q может содержать Z только тогда, когда $P = Q$. Итак, многоугольник восстановился однозначно.

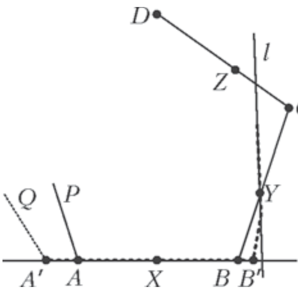


Рис. 36

Докажем теперь, что при достаточно большом числе сторон n правильного многоугольника P четырех точек не хватит для его задания. Предположим, что три из этих точек лежат на одной стороне AB многоугольника P. Правильный треугольник, построенный на AB, лежит целиком внутри P, т.е. четвертая из отмеченных точек лежит вне его. Поэтому, применив к нашему треугольнику гомотетию с центром в середине AB и подходящим коэффициентом, большим 1, можно добиться того, что и четвертая отмеченная точка окажется на его контуре. Значит, в этом случае многоугольник однозначно не восстанавливается.

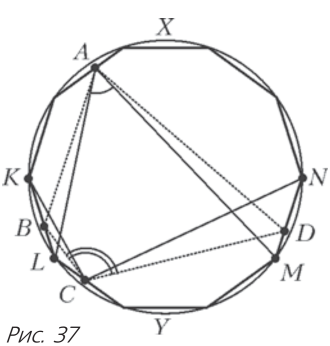


Рис. 37

Если же наше предположение неверно, то отмеченные точки образуют выпуклый четырехугольник $ABCD$, «достаточно близкий» ко вписанному. Именно, покажем, что $\angle A + \angle C \geq 180° - 360°/n$. Пусть точки B и C лежат на сторонах KL и MN многоугольника

P, причем точки A, K и N лежат по одну сторону от BD (рис.37). Опишем вокруг P окружность ω с центром O.

$$\angle A + \angle C \geq \angle LAM + \angle KCN =$$
$$= \frac{1}{2}(\cup LYM + \cup KXN) = 180^\circ - 360^\circ/n .$$

Аналогично,

$$\angle B + \angle D \geq 180^\circ - 360^\circ/n \text{, т.е. } \angle A + \angle C \leq 180^\circ + 360^\circ/n .$$

Мы покажем, что $ABCD$ можно вписать либо в квадрат, либо в правильный треугольник. Пусть $\angle A$ − наибольший угол 4-угольника $ABCD$, а $\angle B \geq \angle D$. Возможны несколько случаев.

Случай 1. Пусть $\angle B \leq 90^\circ$. Тогда ясно, что $ABCD$ можно вписать в квадрат так, чтобы точки A, B попали на одну из сторон (одним из способов, показанных на рисунке 38, в зависимости от того, что больше: проекция CD на AB или проекция $ABCD$ на прямую, перпендикулярную AB).

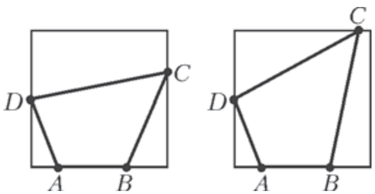


Рис. 38

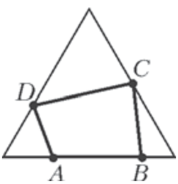


Рис. 39

Случай 2. Пусть теперь $\angle D \leq \angle B < 90^\circ$, но при этом обе суммы $\angle A + \angle D$ и $\angle B + \angle C$ не превосходят 240°. Проведем через C и D прямые, составляющие с AB углы 60° (рис.39). Тогда из наших неравенств следует, что все точки A, B, C, D лежат на сторонах этого треугольника.

Случай 3. Нам остался случай, когда $\angle D \leq \angle B < 90^\circ$ (а значит, оба этих угла близки к 90°), но одна из сумм $\angle A + \angle D$ и $\angle B + \angle C$ больше 240° (поскольку $\angle A$ − наибольший, это может быть лишь сумма $\angle A + \angle D$). Покажем, что в этом случае можно вписать $ABCD$ в квадрат так, как показано на рисунке 40. Пусть X и Y − проекции точек C и D на AB; тогда нам достаточно проверить, что $YB \leq CX$. Но

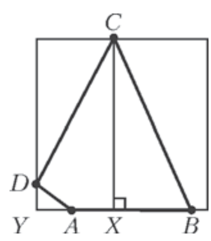


Рис. 40

$$\angle DCX = 270^\circ - (\angle A + \angle D) \leq 30^\circ ,$$

поэтому

$$XY \le CX \operatorname{tg} 30^\circ \le CX/\sqrt{3};$$

с другой стороны,

$$\angle B \ge \frac{1}{2}(\angle B + \angle D) \ge 90^\circ - 180^\circ/n,$$

т.е. при большом n имеем $\operatorname{tg} \angle B \ge 10$; значит,

$$XB = CX \operatorname{ctg} \angle B \le CX/10, \text{ и } YB \le CX/\sqrt{3} + CX/10 < CX,$$

что и требовалось.

Замечание. Пять точек требуются не для любого правильного многоугольника. Так, например, правильный треугольник можно восстановить и по четырем точкам: трем вершинам и внутренней точке одной из сторон.

10 класс

1. $R - 2r$.

Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник, $\angle C = 90^\circ$. Очевидно, что окружность с центром J и радиусом $2r$ касается AC и BC. Докажем, что она касается также описанной около треугольника ABC окружности Ω; отсюда как раз будет следовать, что $OJ = R - 2r$.

Рассмотрим окружность ω, касающуюся AC, BC в точках P, Q соответственно, и касающуюся Ω изнутри в точке T; нам надо доказать, что J – центр ω. Так как T – центр гомотетии ω и Ω, прямые TP, TQ вторично пересекают описанную окружность в точках, касательные в которых параллельны AC и BC, т.е. в серединах B', A' дуг AC, BC. Поэтому прямые AA' и BB' пересекаются в точке I. Применяя теорему Паскаля к ломаной $CAA'TB'B$, получаем, что точки P, I, Q лежат на одной прямой. Наконец, поскольку прямая PQ перпендикулярна биссектрисе угла C, получаем, что P, Q – проекции J на AC и BC (рис.41), что и означает, что J – центр ω.

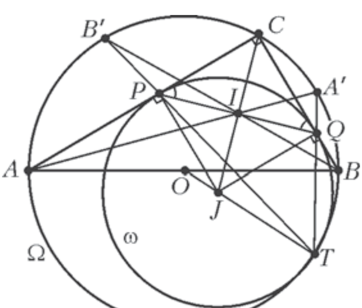


Рис. 41

Второе решение. По формуле Эйлера, $OI = \sqrt{R(R-2r)}$. Поскольку OI – медиана в треугольнике OCJ, получаем

$$4OI^2 = 2\left(OC^2 + OJ^2\right) - CJ^2,$$

или

$$4R(R-2r)=2R^2+2OJ^2-8r^2\ ,$$

откуда и следует

$$OJ^2=(R-2r)^2\ .$$

2. Пусть R – радиус окружностей, O – центр ω_2, P – точка на ω_1, диаметрально противоположная к O, а A' – точка касания AC и ω_2. Так как CO – биссектриса угла ACB, точки A и B симметричны относительно прямой OP.

Заменим сумму косинусов произведением:

$$\cos\angle A+\cos\angle B=2\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}\ .$$

Из отмеченной выше симметрии следует, что

$$\frac{|\angle A-\angle B|}{2}=\angle COP\ ,\ \text{т.е.}\ \ OP\cos\frac{\angle A-\angle B}{2}=CO\ .$$

Наконец, поскольку

$$\frac{\angle C}{2}=\angle OCA=\angle OCA'\ ,\ \text{то}\ \ CO\sin\frac{\angle C}{2}=OA'=R=\frac{OP}{2}$$

(рис.42). Итого,

$$\cos\angle A+\cos\angle B=2\cdot\frac{CO}{OP}\cdot\frac{OP}{2CO}=1\ ,$$

что и требовалось.

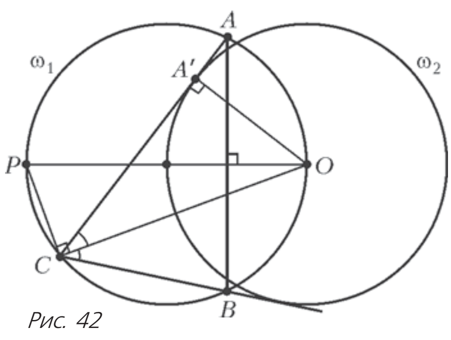


Рис. 42

3. Нет.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть ABC, ABC' – два таких треугольника, что $AC>AC'$, $BC>BC'$. Тогда для любой точки K отрезка AB имеем $CK>C'K$.*

Доказательство. Из условия следует, что точки A, B, C' лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку

CC'. Значит, и точка K лежит по ту же сторону, что равносильно искомому неравенству.

Докажем сначала утверждение задачи при $n = 4$. Предположим противное. Можно считать, что $\frac{A_1A_3}{B_1B_3} \geq \frac{A_2A_4}{B_2B_4}$. Применив гомотетию (с коэффициентом $\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$) ко второму четырехугольнику, можно считать, что $B_1B_3 = A_1A_3$, $B_2B_4 \geq A_2A_4$. Теперь, передвинув второй четырехугольник, можно также считать, что $B_1 = A_1$, $B_3 = A_3$; при этом $A_1A_2 > A_1B_2$, $A_2A_3 > B_2A_3$, $A_3A_4 > A_3B_4$, $A_4A_1 > B_4A_1$. Пусть E – точка пересечения диагоналей A_1A_3 и A_2A_4; тогда по лемме имеем $A_2E > B_2E$, $A_4E > B_4E$ и, следовательно, $A_2A_4 = A_2E + A_4E > > B_2E + B_4E \geq B_2B_4$ (рис. 43). Противоречие.

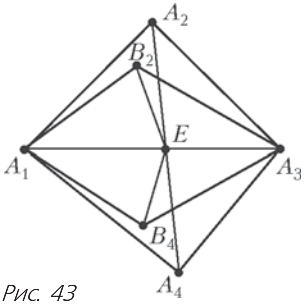


Рис. 43

Теперь докажем утверждение задачи индукцией по n. База при $n = 4$ уже доказана. Пусть $n \geq 5$. Немного подвигав вершины второго многоугольника, можно добиться того, что все неравенства из задачи сохранятся, но при этом все отношения длин соответствующих диагоналей станут различными. Пусть $\frac{A_1A_i}{B_1B_i}$ – максимальное такое отношение. Тогда, применив соответствующую гомотетию (с коэффициентом, меньшим 1) ко второму многоугольнику, мы получим, что $A_1A_i > B_1B_i$, но любая другая диагональ первого многоугольника меньше соответствующей диагонали второго. Теперь осталось применить предположение индукции к многоугольникам $A_1A_2\ldots A_i$ и $B_1B_2\ldots B_i$ (если $i > 3$) или $A_iA_{n+1}\ldots A_n$ и $B_iB_{n+1}\ldots B_n$ (если $i < < n - 1$).

4. Пусть проекции точки P на стороны лежат на окружности с центром O, а P' – точка, симметричная P относительно O. Тогда проекции P' на стороны лежат на той же окружности. При этом P и P' являются фокусами некоторой коники, касающейся прямых, содержащих стороны четырехугольника. Поэтому, если выполнены условия задачи, то стороны четырехугольника являются общими касательными к двум коникам с общим центром. Таких касательных может быть не больше четырех, и они разбиваются на две пары симметричных (а значит, параллельных). Значит, стороны четырехугольника и являются этими четырьмя касательными, а следовательно, образуют параллелограмм.

5. Обозначим $\alpha = \angle ACB$. Пусть I_1, I_2 – центры вписанных окружностей треугольников ABH, CBH. Из подобия этих треугольников следует, что $I_1H_1 : I_2H_2 = AB : BC = \operatorname{tg}\alpha$. Так как отрезки I_1H_1, I_2H_2 перпендикулярны AB и BC соответственно, то проекции этих отрезков на AC равны $I_1H_1 \cos\alpha$ и $I_2H_2 \sin\alpha$, т.е. равны друг другу. Тогда, поскольку O – середина H_1H_2, то проекция O на AC совпадает с серединой B_1B_2, что равносильно утверждению задачи (рис.44).

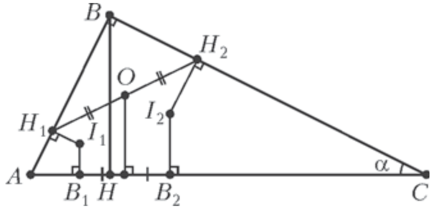


Рис. 44

6. Да.

Первое решение. Предположим противное. Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC, H – совпадающий ортоцентр треугольников ABC и $A'B'C'$, A'', B'', C'' – вторые точки пересечения прямых $A'H'$, $B'H'$, $C'H'$ со вписанной окружностью ω. Тогда

$$\angle A''C''C' = \angle A''A'C' = 90^\circ - \angle A'C'B' = \angle B''B'C' = \angle B''C''C';$$

это значит, что $A''B''$ параллельна касательной к ω в точке C', т.е. $A''B'' \parallel AB$. Значит, стороны треугольников ABC и $A''B''C''$ параллельны друг другу, а H – центр вписанной окружности треугольника $A''B''C''$. Следовательно, существует гомотетия, переводящая треугольник ABC в $A''B''C''$. При этой гомотетии центр описанной окружности O переходит в I, а точка пересечения биссектрис I – в H. Таким образом, точка H лежит на прямой OI, причем $OI : IH = R : r$ (рис.45).

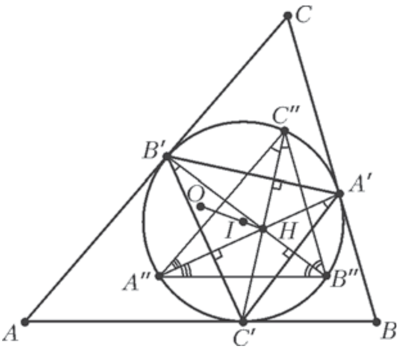


Рис. 45

Какие-то две вершины треугольника ABC (например, A и B) не лежат на прямой OI. Так как AI, BI – биссектрисы углов OAH, OBH соответственно, то $OI : IH = AO : AH = BO : BH$. Следовательно, $AH = BH = r$, что невозможно, ибо $AH + BH \geq AB > 2r$. Полученное противоречие показывает, что треугольник ABC – правильный.

Второе решение. Опять же предположим противное и обозначим через H совпадающий ортоцентр. Имеем $IC' \parallel HC \perp AB$. Значит, либо точки C, I, C', H лежат на одной прямой (и тогда $AC = BC$), либо четырехугольник $CIC'H$ – параллелограмм; аналогичное утверждение верно про остальные вершины. У треугольника ABC найдется сторона (скажем, AB), не равная ни одной другой его стороне. Тогда четырехугольники $AIA'H$ и $BIB'H$ – параллелограммы, и $AH = A'I = r = B'I = BH = r$, что опять же невозможно, ибо $AH + BH \geq AB > 2r$.

7. Да, может; 4 или 8 граней.

Пусть R – полученный многогранник. Ясно, что часть многогранника P содержит хотя бы одну его вершину A, не лежащую в плоскости разреза. Многогранный угол многогранника P при ней будет также многогранным углом при вершине многогранника R; это означает, что все многогранники P и Q подобны. Аналогично, Q также подобен им. Более того, если хотя бы одно ребро многогранника P, выходящее из A, не имеет общих точек (даже другой вершины!) с плоскостью разреза, то оно также будет являться ребром в R. Тогда в подобных многогранниках P и R ребра равны, а следовательно, равны и многогранники, что невозможно.

Итак, часть P, вошедшая в R – это пирамида с вершиной A. Аналогично, часть Q, вошедшая в R – это пирамида с вершиной B. Следовательно, не менее половины граней в R примыкает к одной и той же вершине. Это исключает додекаэдр и икосаэдр. Если наши многогранники – кубы, то от P и Q отрезаются треугольные пирамиды, и в итоговом многограннике не больше 5 вершин, что неверно.

Оставшиеся случаи октаэдра и тетраэдра возможны, как показано на рисунке 46.

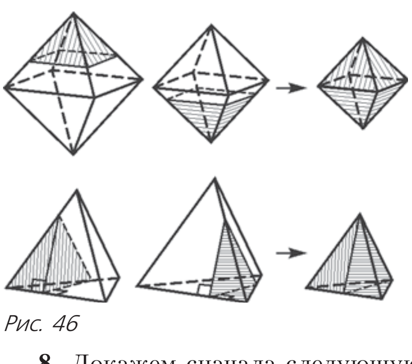


Рис. 46

8. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, вписанные в окружность k; пусть их соответствующие стороны пересекаются в точках A_1, B_1, C_1 (рис.47). Тогда*

$$\left(\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\right)\cdot\left(\frac{A'C_1}{C_1B'}\cdot\frac{B'A_1}{A_1C'}\cdot\frac{C'B_1}{B_1A'}\right)=1.$$

Доказательство. Из подобных треугольников AC_1A' и $B'C_1B$ имеем $\frac{AC_1}{B'C_1} = \frac{AA'}{BB'}$ и $\frac{A'C_1}{BC_1} = \frac{AA'}{BB'}$. Перемножая эти равенства с четырьмя аналогичными, получаем требуемое.

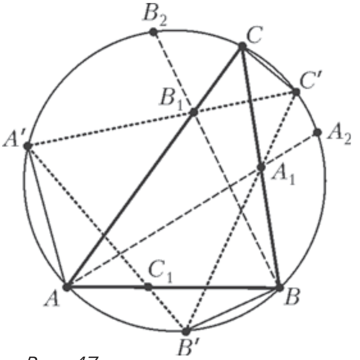


Рис. 47

Перейдем к решению задачи. Докажем сначала, что для любых точек A_1, B_1 на сторонах BC и AC найдется не более одной точки C_1 на стороне AB такой, что треугольник ABC восстанавливается однозначно. Зафиксируем треугольник ABC и точки A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 – вторые точки пересечения прямых AA_1, BB_1 с окружностью k; C' – произвольная точка дуги A_2CB_2; A', B' – вторые точки пересечения прямых $C'A_1$, $C'B_1$ с k; C_1 – точка пересечения AB и $A'B'$. Когда точка C' близка к A_2 или к B_2, точка C_1 близка к A или B соответственно. Далее, при движении точки C' от A_2 до B_2 точка C_1 непрерывно движется от A до B (в случае, когда $C = C'$, рассмотрим предельное положение точки C_2; то, что оно существует, гарантируется леммой). Значит, для любой точки C_1, кроме, возможно, вышеупомянутого предельного положения, треугольник ABC однозначно не восстанавливается, ибо существует второй треугольник $A'B'C'$.

Осталось доказать, что если AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке T, то треугольник восстанавливается однозначно (тогда из выше доказанного следует, что других случаев нет).

Пусть это не так; тогда из леммы мы получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{A'C_1}{C_1B'} \cdot \frac{B'A_1}{A_1C'} \cdot \frac{C'B_1}{B_1A'} = 1,$$

т.е. отрезки $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ также пересекаются в одной точке T'. Но это невозможно. Действительно, пусть, например, точка A' лежит на дуге AC (рис.48); тогда T' не может лежать в угле ATB, так как его не пересекает отрезок $A'A_1$. Остальные случаи разбираются аналогично.

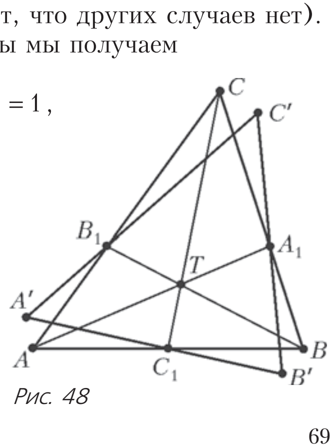


Рис. 48

VII ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. Да.

Первое решение. Пусть T – прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 1003, а один из катетов – 1. Из двух таких треугольников составим прямоугольник, а из 1003 таких прямоугольников – прямоугольник со стороной 1003. Теперь приложим к одной из сторон этого прямоугольника равнобедренный треугольник, составленный из двух треугольников, равных T, а к противоположной стороне четырехугольник из трех таких треугольников (рис.49).

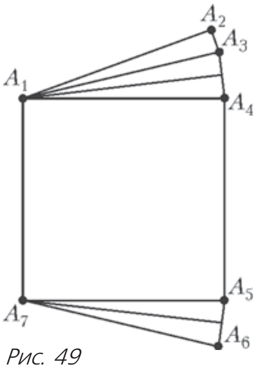


Рис. 49

Второе решение. Возьмем квадрат со стороной 34 и отрежем от трех его углов равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами 3, 6 и 16. Получится семиугольник, который можно разрезать на равнобедренные прямоугольные треугольники с катетом 1, причем число этих треугольников равно $2 \cdot 34^2 - 9 - 36 - 256 = 2011$.

Вместо квадрата можно взять прямоугольник $m \times n$ и отрезать от него равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами x, y, z такими, что $2mn - x^2 - y^2 - z^2 = 2011$. Участники олимпиады нашли несколько решений такого вида.

Третье решение. (М.Аманжолов, Казахстан) Пусть T – равнобедренный треугольник с основанием 1 и углом при вершине $120°$. Тогда правильный треугольник со стороной 1 можно разрезать на три треугольника, равных T. С другой стороны, из 335 правильных треугольников можно сложить равнобедренную трапецию с основаниями 168 и 167 и боковыми сторонами 1. Две таких трапеции, соединенные большими основаниями, образуют выпуклый шестиугольник, который можно разрезать на 2010 треугольников, равных T. Приложив к его меньшей стороне еще один такой треугольник, получим искомый семиугольник.

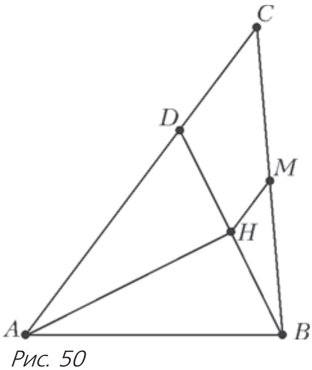


Рис. 50

2. Пусть D – точка пересечения прямых BH и AC (рис.50). Тогда в треугольнике ABD AH – биссектриса и высота. Следовательно, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AD = BD$ и $BH = HD$. Значит, MH – средняя линия в треугольнике BCD и

$$MH = CD/2 = (AC - AB)/2 = 1 .$$

3. Пусть B_0, C_0 – середины сторон AC, AB соответственно. Так как треугольники AB_0B_1, AC_0C_1 прямоугольные с $\angle A = 60°$, то $AB_1 = 2AB_0 = AC$ и $AC_1 = 2AC_0 = AB$. Следовательно, прямая B_1C_1 симметрична BC относительно биссектрисы угла A. Поскольку эта биссектриса проходит через центр вписанной окружности, а BC касается этой окружности, то и B_1C_1 тоже касается вписанной окружности.

4. Да.

Из условия следует, что в четырехугольнике $A'C'B'C$ диагональ CC' является биссектрисой углов C и C', а значит, осью симметрии. Поэтому $A'C = B'C$, $A'C' = B'C'$, $\angle CB'A' = \angle CA'B'$ и $\angle AB'C' = \angle BA'C'$. Аналогично получаем, что

$$\angle BC'A' = \angle BA'C' = \angle AB'C' = \angle AC'B' .$$

Следовательно, треугольники $AB'C'$ и $BA'C'$ равны, т.е. $AB' = BA'$ и $AC = BC$. Равенство $AB = BC$ доказывается аналогично.

5. Для равносторонних и треугольников с углами 30, 30 и 120 градусов.

Пусть треугольник ABC – не равносторонний и AB – его наибольшая сторона. Тогда точки A', B' лежат на отрезке AB. Из условия следует, что $C'C_0$, где C_0 – середина AB, – серединный перпендикуляр к $A'B'$, значит,

$$CA' = A'B = AB' = CB' ,$$

т.е. C' совпадает с C и треугольник ABC равнобедренный. Кроме того,

$$2\angle A = \angle A + \angle CAB' = \angle CB'B = 60° ,$$

следовательно,

$$\angle A = \angle B = 30° .$$

6. Пусть O_i – центр окружности ω_i. Из условия следует, что O_1AO_2B, O_1CO_3M, O_3MO_4N, O_4NO_2D – ромбы со сторонами 1. Значит, $\overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{MO_3} = \overrightarrow{O_4N} = \overrightarrow{DO_2}$ и $\overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{BO_2}$. Следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$, что равносильно утверждению задачи.

7. Пусть T – четвертая вершина параллелограмма $CBPT$.

Тогда $PT = BC$ и $CT = = BP = CQ$ (рис.51). Следовательно, $\angle PQT > \angle TQC = \angle QTC > \angle QTP$, т.е. $PT > > PQ$.

8. Пусть I – центр вписанной окружности, P – точка

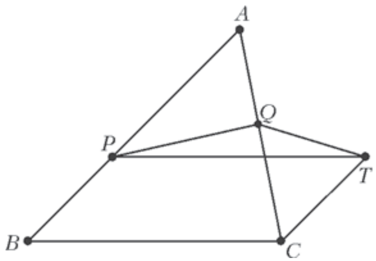


Рис. 51

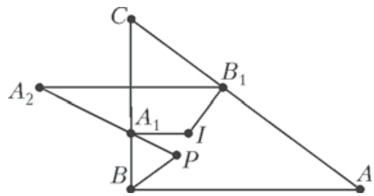


Рис. 52

пересечения прямой A_1A_2 с медианой BB_0 (рис.52). Так как $\angle IA_1P = \angle IA_1B_1 = \angle C/2 = \angle PBA_1/2$, то $\angle BA_1P = \angle BPA_1$, т.е. $BP = BA_1$. Так как $BA_1 = BC_1$, прямая C_1C_2 тоже проходит через P.

9. Из условия следует, что $\angle AHC_1 = \angle ABH$. Значит, $\angle C_1HB' = \angle AHB' - \angle ABH = \angle HAB = \pi/2 - \angle ABC$ (B' – основание высоты). Аналогично, $\angle B'HA_1 = \pi/2 - \angle ABC$, т.е. треугольник A_1HC – равнобедренный.

10. По теореме Фалеса $AQ/QD = AM/MB = CP/PB$. Значит, $AQ/PC = AD/BC = AO/CO$. Следовательно, треугольники AOQ и COP подобны и $\angle AOQ = \angle COP$.

11. Проведем через центр вписанной окружности I диаметр PQ, параллельный AC (рис.53). Так как $\angle PIC = \angle ACI = \angle BCI$ и $CA_1 = (AB + BC - AC)/2 = r = IP$, четырехугольник IPA_1C является равнобедренной трапецией. Значит, прямая A_1P параллельна IC, т.е. совпадает с A_1A_2. Соответственно, P совпадает с A', и, аналогично, Q совпадает с C'.

12. Так как точки P, Q лежат на окружности с диаметром AB,

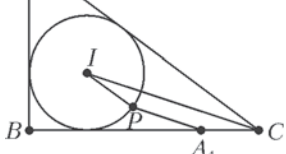


Рис. 53

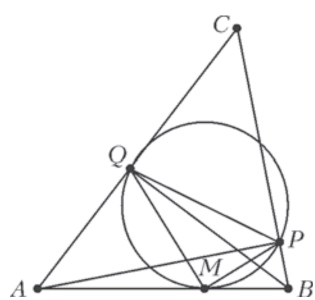


Рис. 54

$\angle BPQ = 180° - \angle A$. Значит,

$$\angle MPQ = \angle BPQ - \angle BPM = 180° - \angle A - \angle AQM = \angle AMQ .$$

Следовательно, окружность, проходящая через точки P, Q, M, касается прямой AB (рис.54).

13. а) Пусть точки A' , B' , C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Так как середина C_0 отрезка $A'B'$ лежит внутри треугольника ABC, расстояние от нее до стороны AB меньше опущенной на эту сторону высоты треугольника. Поскольку центр тяжести M треугольника $A'B'C'$ делит отрезок $C'C_0$ в отношении 2 : 1, то расстояние от M до AB меньше, чем $2/3$ этой высоты. Аналогично получаем, что расстояния от M до двух других сторон меньше, чем $2/3$ соответствующих высот, т.е. M лежит внутри шестиугольника, образованного сторонами данного треугольника и прямыми, симметричными им относительно точки пересечения его медиан. При этом, если две вершины треугольника $A'B'C'$ приближаются к одной вершине треугольника ABC, то центр тяжести приближается к границе указанного шестиугольника, так что все его внутренние точки принадлежат искомому ГМТ.

б) Рассуждая аналогично п.а), получаем, что искомое ГМТ является телом, ограниченным гранями данного тетраэдра и параллельными им плоскостями, каждая из которых делит соответствующую высоту в отношении 1:3, считая от вершины. Четыре из восьми граней этого тела являются треугольниками, а остальные – шестиугольниками.

14. $1 : 2\sqrt{3} : 3$.

Так как биссектриса угла B делит пополам угол между высотой и медианой, то угол B прямой. Значит, высота из вершины A совпадает со стороной AB, т.е. биссектриса угла A делит сторону BC в отношении 1 : 3. Следовательно, отношение $AB : AC$ тоже равно 1 : 3 и по теореме Пифагора $BC : AB = 2\sqrt{2}$.

15. Так как $S_{OBMC} - S_{ABMC} = S_{ABC} - S_{OBC} + 2S_{MBC}$, геометрическим местом точек, для которых $S_{OMBC} = S_{AMBC}$, является серединный перпендикуляр к отрезку OA. Поэтому $AM = OM = 1$.

16. Прежде всего заметим, что когда прямая l движется параллельно себе с постоянной скоростью, прямые, симметричные l относительно AC и BC, также перемещаются параллельно себе с постоянной скоростью. Поэтому точка C_1 движется по прямой, проходящей через C, т.е. точка пересечения CC_1 с описанной окружностью зависит только от направления прямой l. Пусть теперь A' , B' – точки пересечения l с BC и AC (рис. 55).

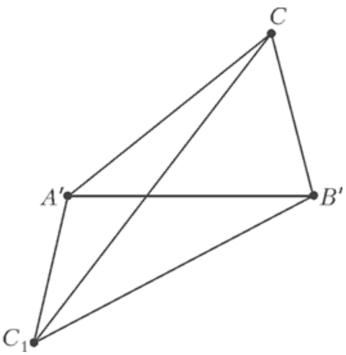


Рис. 55

Тогда $\angle C_1B'C = \angle CB'A'$, $\angle C'AC = \angle BA'C_1$. Значит, C – центр вписанной или вневписанной окружности треугольника $A'B'C_1$, т.е. C_1C – биссектриса угла $A'C_1B'$ или смежного с ним. Но угол между прямыми $A'C_1$ и $B'C_1$ не зависит от l, значит, не зависит от l и угол между CC_1 и C_1A'. Поэтому при вращении l с постоянной скоростью прямые AA_1, BB_1, CC_1 вращаются с той же скоростью, откуда следуют все три утверждения задачи.

17. а) Нет.

Пусть в треугольнике ABC длины сторон BC, AC, AB равны a, b, c соответственно, причем $a \le b \le c$. Далее, пусть CM – медиана, AL – биссектриса. Если угол C тупой или прямой, то $AL > AC$. Так как $BC \le AC$, то $\angle CMA$ – тупой или прямой, поэтому $CM \le AC$ и, значит, $AM < AL$.

Пусть теперь $\angle C$ острый. Так как сторона AB наибольшая, то $\angle C \ge 60^\circ$ и углы A, B острые. Тогда основание H высоты AH лежит на стороне BC, а не на ее продолжении. Поэтому длина AH (а тогда и длина AL) не меньше, чем $AC\cos 60^\circ = b\sqrt{3}/2$. В то же время квадрат длины медианы CM равен

$$\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \le \frac{2a^2 + b^2}{4} \le \frac{3b^2}{4}.$$

Поэтому длина CM не превосходит $b\sqrt{3}/2$ и, значит, не превосходит длины биссектрисы угла A.

б) Нет.

Пусть опять $a \le b \le c$ и l – длина биссектрисы угла C. Тогда

$$(al + bl)\sin\frac{\angle C}{2} = 2S_{ABC} = ab\sin\angle C, \text{ т.е. } l = \frac{2ab\cos(\angle C/2)}{a+b}.$$

С другой стороны, высота из вершины A равна $h = b\sin\angle C$. Так как $a + b \ge 2a$, а $\angle C \ge 60^\circ$, $h/l = \dfrac{(a+b)\sin(\angle C/2)}{a} \ge 1$.

Примечание. Нетрудно построить треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее наибольшей высоты.

18. а) 3.

Первое решение. Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек пересечения данных прямых. Две прямые, проходящие через вершину этой оболочки, делят плоскость на четыре угла, в одном из которых лежат все остальные точки пересечения. Соответственно, угол, вертикальный этому, не пересекается остальными прямыми, так что количество углов не может быть меньше трех. Пример с тремя углами легко строится по индукции: очередную прямую надо проводить так, чтобы она пересекала все предыдущие внутри треугольника, являющегося выпуклой оболочкой точек пересечения.

Второе решение. (А.Гончарук, Харьков) Рассмотрим многоугольник T, являющийся объединением всех ограниченных частей. Ясно, что все углы являются вертикальными к углам T, меньшим $180°$. Из формулы для суммы углов сразу следует, что таких углов не меньше трех. Многоугольник с тремя углами можно построить следующим образом. Возьмем точку D внутри треугольника ABC, впишем в угол ADB окружность достаточно малого радиуса, возьмем на меньшей из ее дуг, образованных точками касания, $n - 4$ точки и проведем касательные в этих точках. Эти касательные вместе с прямыми AC, BC, AD, BD образуют искомый многоугольник.

б) n при нечетном n, $n - 1$ при четном, большем 2.

Построим окружность, внутри которой лежат все точки пересечения. Данные прямые разбивают ее на $2n$ дуг. Пусть AB, BC – две соседние дуги, X, Y – точки пересечения прямой, проходящей через B, с прямыми, проходящими через A и C. Тогда, если X лежит на отрезке BY, то часть плоскости, содержащая дугу BC, не является углом, т.е. из двух частей, содержащих соседние дуги, углом может быть только одна. Следовательно, количество углов не превосходит n, причем равенство возможно только тогда, когда углом является часть, содержащая каждую вторую дугу. Но при четном n это означает, что есть два угла, содержащие противоположные дуги, т.е. образованные одной и той же парой прямых. При $n > 2$ это, очевидно, невозможно. При нечетном n прямые, содержащие стороны правильного n-угольника, разбивают плоскость на части, из которых n являются углами. Очевидно, что можно добавить к ним еще одну прямую так, чтобы количество углов не уменьшилось.

19. Да.

Зафиксируем вершины A, B, построим точку D, симметричную A относительно B, и возьмем произвольную точку C такую, что $\angle BCD = 150°$. Тогда высота треугольника ABC из вершины A равна расстоянию DH от D до прямой BC, т.е. половине CD. С другой стороны, медиана BM из вершины B является средней линией в треугольнике ACD, т.е. тоже равна половине CD (рис.56). Будем теперь двигать точку C по дуге BD, вмещающей

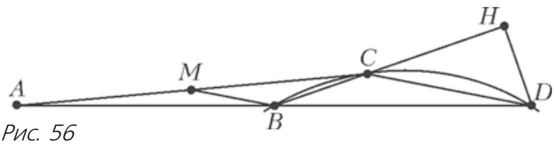


Рис. 56

угол $150°$. Когда C стремится к B, биссектриса угла C стремится к нулю, а медиана из B – к $AB/2$. Когда C стремится к D, медиана из B стремится к нулю, а биссектриса не меньше, чем BC. Значит, существует положение точки C, при котором биссектриса равна двум другим отрезкам.

Примечание. Нетрудно видеть, что при движении C от B к D биссектриса возрастает, а высота и медиана убывают. Следовательно, углы искомого треугольника определяются однозначно.

20. Будем считать, что $ABCD$ не является трапецией. Противный случай требует лишь незначительных изменений решения.

По теореме Ньютона I лежит на MN. Пусть $\lambda = MI : IN$. Возьмем на сторонах четырехугольника точки P, Q, R и S такие, что $AP : PB = CQ : QB = CR : RD = DS : SA = \lambda$. Покажем, что I – середина отрезков PR и QS.

Это можно сделать, например, методом масс: поместим единичные массы в точки A и C, а массы λ в B и D. Две первые массы можно заменить массой 2 в точке M, две вторые – массой 2λ в точке N, следовательно, I – центр всех четырех масс. С другой стороны, можно заменить массы в A и B на массу $1+\lambda$ в точке P, а две оставшихся на такую же массу в точке R.

Теперь, так как I – середина PR, а прямые AB и CD – не параллельные касательные к окружности с центром I, то они образуют равные углы с PR, т.е. PR параллельна биссектрисе одного из образованных этими прямыми углов. Аналогично, QS параллельна биссектрисе одного из углов между AD и BC. Следовательно, $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $PR \perp QS$. Так как $PQRS$ – параллелограмм (со сторонами, параллельными AC и BD), это равносильно тому, что $PQRS$ – ромб. Но

$$PQ = QR \Leftrightarrow \frac{1}{1+\lambda} AC = \frac{\lambda}{1+\lambda} BD \Leftrightarrow \lambda = AC : BD,$$

что и требовалось доказать.

21. Прямые PM и QN пересекаются в центре окружности O. Поэтому утверждение задачи следует из теоремы Дезарга, примененной к треугольникам PML и NQK.

22. При гомотетии с центром C и коэффициентом $1/2$ прямая XY перейдет в радикальную ось точки C и окружности, проходящей через середины A', B', C' сторон BC, CA, AB. С другой стороны, касательная в точке C к описанной окружности касается также окружности $A'B'C'$, т.е. является радикальной осью этой окружности и точки C. Следовательно, точка пересечения этих радикальных осей лежит на прямой $A'B'$. Сделав обратную гомотетию, получим утверждение задачи.

23. Пусть P_a, P_b, P_c – середины высот AH_a, BH_b, CH_c. Очевидно, что точки A', B', C' лежат на сторонах треугольника $P_aP_bP_c$ и делят их в тех же отношениях, в каких точки A_1, B_1, C_1 делят стороны треугольника ABC. Поэтому п.а) сразу следует из теоремы Менелая. Кроме того, если l проходит через некоторую фиксированную точку, то l' также проходит через некоторую фиксированную точку, так что для доказательства п.б) достаточно проверить его для каких-то двух прямых, проходящих через центр O описанной окружности. Например, для прямых, проходящих через какую-нибудь вершину треугольника.

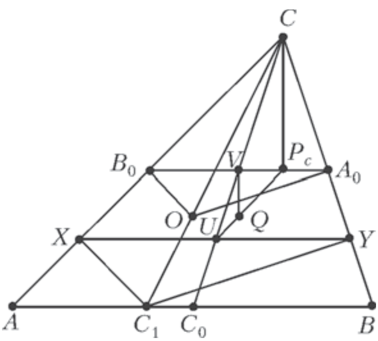


Рис. 57

Пусть C_1 – точка пересечения CO и AB; X, Y – проекции C_1 на AC и BC; A_0, B_0, C_0 – середины BC, CA, AB, U, V – середины XY и A_0B_0, Q – точка пересечения серединного перпендикуляра к A_0B_0 0 с UP_c (рис.57). Так как $XY \parallel AB$, точки C, V, U лежат на одной прямой. Значит, $VQ/CP_c = UV/UC = C_1O/CC_1$, т.е. $VQ = OC_0/2$ и Q – центр окружности $A_0B_0C_0$.

24. Докажем сначала, что искомый треугольник – педальный, т.е. перпендикуляры, восставленные из его вершин к соответствующим сторонам ABC, пересекаются в одной точке. Действительно, для произвольного треугольника $A'B'C'$ окружности $AB'C'$, $BC'A'$ и $CA'B'$ пересекаются в некоторой точке P. Пусть A'', B'', C'' – проекции P на BC, CA, AB. Так как $\angle A'PB' = \angle A''PB'' = \pi - \angle C$ и т.д., то $\angle A''PA' = \angle B''PB' = \angle C''PC'$, и, значит, треугольник $A''B''C''$ получается из $A'B'C'$ поворотной гомотетией с коэффициентом, меньшим 1.

Рассмотрим теперь точку T, педальный треугольник которой правильный, и докажем, что педальный треугольник любой другой точки P имеет хотя бы одну сторону большей длины. Пусть A', B' – проекции P на BC и AC. Тогда $A'B' = PC\sin\angle C$, т.е. $A'B'$ не превосходит стороны педального треугольника T тогда и только тогда, когда $PC \le TC$. Аналогично должны выполняться неравенства $PB \le TB$, $PA \le TA$. Очевидно, что три эти неравенства выполнены только для точки T.

Осталось описать построение точки T. Из ее определения следует, что $TA \cdot BC = TB \cdot AC = TC \cdot AB$. Геометрическим местом точек, удовлетворяющих первому равенству, является окружность Аполлония, проходящая через C и основания внешней и внутренней биссектрис угла C. Аналогично строится окружность – геометрическое место точек, удовлетворяющих второму равенству. Точка T будет общей точкой этих окружностей, лежащей внутри треугольника ABC.

25. Да.

Пусть A, B, C, D – точки касания правильного тетраэдра с вписанной сферой. Повернув их на $120°$ относительно общего перпендикуляра к отрезкам AB и CD, получим точки A', B', C', D', а повернув на $240°$, – точки A'', B'', C'', D''. Плоскости, касающиеся сферы в этих двенадцати точках, образуют три искомых тетраэдра.

Действительно, для любых двух из этих точек существует движение, переводящее все множество из двенадцати точек в себя, а одну из выбранных точек в другую. Такими движениями можно перевести любую грань полученного многогранника в любую другую.

Финальный тур

8 класс

1. *Первое решение.* Пусть AD, BC – основания трапеции. Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD. Пусть E – точка пересечения этой прямой с продолжением основания AD. Тогда треугольник ACE – прямоугольный и, значит, его медиана из вершины C равна половине гипотенузы, т.е. средней линии трапеции. Из условия задачи следует, что высота этого треугольника совпадает с медианой, поэтому диагонали трапеции равны.

Второе решение. Пусть AD, BC – основания трапеции, O – точка пересечения ее диагоналей. Тогда медианы прямоугольных треугольников OAD, OBC равны половинам их гипотенуз, т.е. сумма этих медиан равна средней линии трапеции. С другой стороны, высота трапеции равна сумме высот этих же треугольников. Поэтому из условия задачи следует, что медианы совпадают с высотами, т.е треугольники OAD, OBC – равнобедренные, откуда, очевидно, вытекает, что $AB = CD$.

2. Пусть $ABCD$ – полученный прямоугольник; O – его центр; K, M – середины его коротких сторон AB, CD; L, N – точки пересечения окружности с диаметром KM с отрезками BC и AD соответственно (рис.58). Тогда прямоугольник $KLMN$ – искомый. Действительно, пусть P – проекция M на LN. Так как $\angle CLM = \angle OML = \angle MLO$, то треугольники MCL и MPL равны и при перегибании по ML они совместятся. Аналогично, при перегибании по MN совместятся треугольники MDN и MPN. Наконец, поскольку конструкция симметрична относительно точки O, то при перегибании по KL и KN треугольники BKL и AKN наложатся на треугольник NKL.

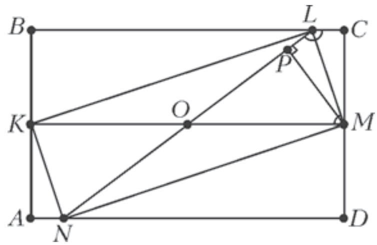


Рис. 58

3. *Первое решение.* Так как точка A_1 симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC, то перпендикуляр из A_1 симметричен высоте из A. По теореме Фалеса, он пересекает прямую OH, где O и H – центр описанной окружности и точка пересечения высот треугольника, в точке, симметричной H относительно O. Через эту же точку проходят два других перпендикуляра.

Второе решение. Пусть K, L и M – точки попарного пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 (рис.59). Докажем, что KC_1 – высота треугольника KLM. Поскольку $KBCA$ – параллелограмм, а AC_1CB – равнобокая трапеция, то $KA = BC = AC_1$, $\angle KAB = \angle ABC = \angle BAC_1$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике KAC_1 AB является биссектрисой, а следовательно, и высотой. Таким образом, $AB \perp KC_1$, откуда $CC_1 \perp KC_1$. Аналогично доказывается, что LA_1 и MB_1 также являются высотами треугольника KLM. Поскольку высоты пересекаются в одной точке, то утверждение задачи доказано.

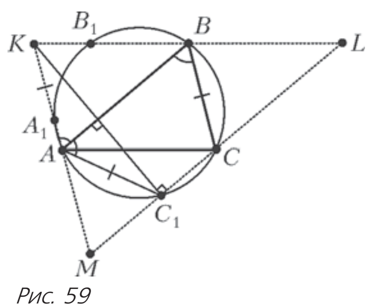


Рис. 59

4. Закрасим меньшие из дуг, стягиваемых проведенными хордами. Если сдвинуть закрашенные дуги так, чтобы соответствующие хорды образовали ломаную, то расстояние между концами этой ломаной будет меньше 1, а поскольку хорда длины 1 стягивает дугу, равную $1/6$ круга, то сумма закрашенных дуг будет меньше, чем $1/6$ круга.

Теперь впишем в окружность правильный шестиугольник и отметим одну из его вершин. Будем вращать этот шестиугольник и каждый раз, когда отмеченная вершина попадает в закрашенную точку, закрашивать точки, в которые попадут остальные вершины. Тогда общая длина закрашенных дуг увеличится не более чем в 6 раз, следовательно, найдется положение шестиугольника, при котором все его вершины попадут в незакрашенные точки. Очевидно, что в этом положении стороны шестиугольника не будут пересекать проведенных хорд.

5. Так как треугольник BAN – равнобедренный, то $\angle ANB = \dfrac{\angle MAB}{2}$ (рис.60). Аналогично $\angle AMC = \dfrac{\angle NAC}{2}$. Значит, сумма этих углов равна $60°$, а угол между прямыми BN и CM равен $120°$, что равносильно утверждению задачи.

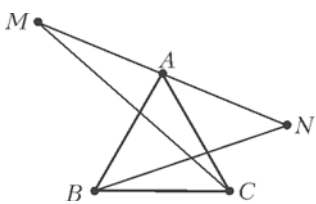


Рис. 60

6. *Первое решение.* Так как треугольники BCB_1 и BCC_1 прямоугольные, то их медианы B_1A_0, C_1A_0 равны половине гипотенузы, т.е. $B_1A_0 = A_0C = A_0B = C_1A_0$. Далее, $\angle PB_1A = \angle CB_1A_0 = \angle B_1CA_0 = \angle PAC$, и, значит, $PA = PB_1$ (рис.61). Аналогично, $AQ = QC_1$. Следовательно, вписанная окружность треугольника A_0PQ касается его сторон в точках A, B_1, C_1, откуда и следует утверждение задачи.

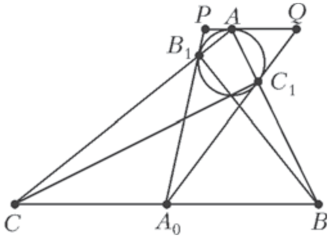


Рис. 61

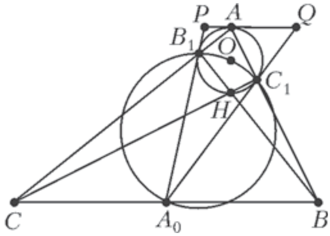


Рис. 62

Второе решение. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC, O – середина AH. Тогда точки A_0, B_1, C_1, O

лежат на окружности девяти точек треугольника ABC, причем A_0O – диаметр этой окружности. С другой стороны, точки B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AH, которая, следовательно, и является вписанной окружностью треугольника APQ (рис.62).

7. Из условия задачи следует, что точки P, Q, M и начало координат O лежат на окружности с диаметром PQ. Значит, точка N, симметричная M относительно PQ, тоже лежит на этой окружности и $\angle PON = \angle PMN = \angle PNM = \angle POM$ (рис.63). Таким образом, N лежит на прямой, симметричной OM относительно осей координат. С другой стороны, если N – произвольная точка этой прямой, а P, Q – точки пересечения осей координат с окружностью OMN, то

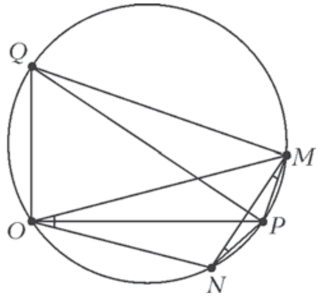


Рис. 63

$$\angle PMN = \angle PON = \angle POM = \angle PNM$$

и

$$\angle PMQ = \angle POQ = \angle PNQ = 90^\circ,$$

поэтому точки M и N симметричны относительно PQ.

8. Сначала разделим сторону пополам. Проведя диагонали, найдем центр O квадрата $ABCD$. Теперь пусть X – точка на стороне BC, Y – точка пересечения XO и AD, U – точка пересечения AX и BY, V – точка пересечения прямых UC и XY (рис.64). Тогда прямая BV делит основания трапеции $CYUX$ пополам. Соединив O с серединой CY, разделим пополам стороны AB и CD.

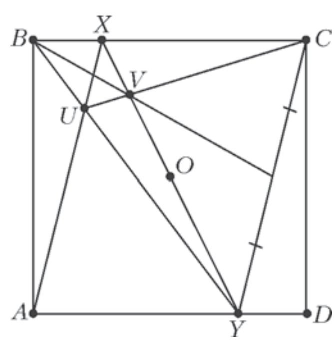


Рис. 64

Покажем теперь, что если две противоположные стороны разделены на k равных частей, то их можно разделить на $k+1$ равных частей. Пусть $AX_1 = X_1X_2 = \ldots = X_{k-1}B$, $DY_1 = Y_1Y_2 = \ldots = Y_{k-1}C$. Тогда по теореме Фалеса прямые $AY_1, X_1Y_2, \ldots, X_{k-1}C$ делят диагональ BD на $k+1$ равных

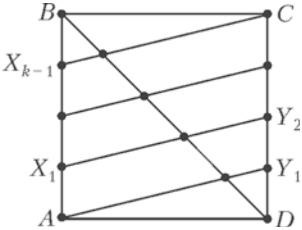


Рис. 65

частей (рис.65). Аналогично разделив вторую диагональ и проведя через соответствующие точки прямые, параллельные BC, разделим на $k+1$ равных частей сторону AB.

9 класс

1. Угол между касательной к окружности B_1DM в точке D и прямой AD равен углу MB_1D, который, в свою очередь, равен углу BAD (рис.66). Аналогично, угол между касательной к окружности A_1DN и BD равен углу ABD. Поскольку $\angle BAD + \angle ABD = 90° = \angle ADB$, касательные к обеим окружностям совпадают.

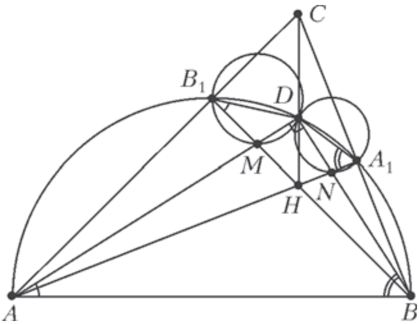


Рис. 66

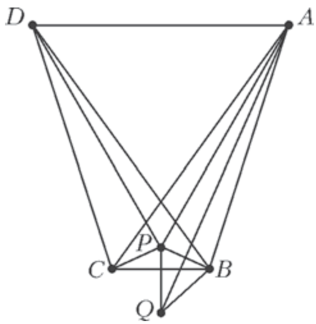


Рис. 67

2. Пусть точка D симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC. Тогда $ABCD$ − равнобокая трапеция, а диагональ BD − биссектриса угла B. Следовательно, $CD = DA = AB$. Далее, $\angle DAP = \angle C + \angle A/3 = (\angle A + \angle B + \angle C)/3 = 60°$. Поэтому треугольник ADP равносторонний и $AP = AB$. Поскольку AQ − биссектриса угла PAB, то $QP = QB = QC$ (рис.67).

3. Центр O описанной окружности треугольника лежит на продолжении HM за точку M, и $MO = HM/2$. Кроме того, прямые BI, CI являются биссектрисами углов OBH, OCH ($\angle CBH = \angle ABO = \pi/2 - \angle C$). Следовательно, $BO/BH = CO/CH = IO/IH$, т.е. точки B, C лежат на окружности Аполлония точек O и H, проходящей через I. Но центр окружности BIC лежит на описанной окружности треугольника ABC. Таким образом, получаем следующее построение.

Построим точку O и окружность Аполлония. Затем построим окружность с центром O, проходящую через центр этой окружности. Две окружности пересекутся в точках B, C, а прямая OH вторично пересечет описанную окружность в точке A.

4. Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, B и C – в точке L, C и D – в точке M, D и A – в точке N (рис.68). Тогда прямая KM – биссектриса угла между AD и BC. Обозначив этот угол через φ, по теореме о внешнем угле получаем, что

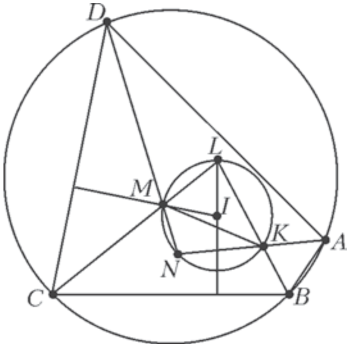


Рис. 68

$$\angle LKM = \angle B/2 - \varphi/2 = \\ = (\pi - \angle A)/2 = \angle C/2$$

и, значит, $\angle LIM = \angle C$. С другой стороны, перпендикуляры из L на BC и из M на CD образуют с ML углы, равные $(\pi - \angle C)/2$, т.е. треугольник, образованный этими перпендикулярами и ML, равнобедренный с углом при вершине, равным углу C. Поэтому вершина этого треугольника совпадает с I. Таким образом, перпендикуляры, опущенные из вершин четырехугольника $KLMN$ на соответствующие стороны $ABCD$, проходят через I. Аналогично получаем, что перпендикуляры из вершин четырехугольника, образованного внешними биссектрисами, проходят через J.

Пусть теперь K' – точка пересечения биссектрис внешних углов A и B. Так как четырехугольник $AKBK'$ вписан в окружность с диаметром KK', то проекции K и K' на AB симметричны относительно середины AB. Отсюда и из утверждения, доказанного выше, следует, что проекции I и J на каждую из сторон $ABCD$ симметричны относительно середины этой стороны, что равносильно утверждению задачи.

Примечание. Известно аналогичное утверждение для треугольника: центр описанной окружности является серединой отрезка между центром вписанной окружности и центром описанной окружности треугольника, образованного биссектрисами внешних углов.

5. Нет. Возьмем треугольник, две стороны которого равны 2 и 3, и будем увеличивать угол между этими сторонами. При стремлении угла к $180°$ отношение высот треугольника будет стремиться к $1/2 : 1/3 : 1/5$, так что из них при любом значении угла можно будет составить треугольник. С другой стороны, наименьшая из биссектрис стремится к нулю, а две другие – к неравным величинам. Значит, при больших значениях угла треугольник из биссектрис составить нельзя.

Приведем точные оценки. Прежде всего отметим, что, если две стороны треугольника равны a и b, угол между ними – C, а биссектриса этого угла – l_c, то площадь треугольника равна

$$S = ab\sin\frac{\angle C}{2} = \frac{(a+b)l_c\sin(\angle C/2)}{2},$$

откуда

$$l_c = \frac{2ab\cos(\angle C/2)}{(a+b)}.$$

Аналогично находятся длины биссектрис l_a, l_b.

Пусть теперь $a = 2$, $b = 3$. Тогда

$$\cos\frac{\angle A}{2} > \cos\frac{\angle B}{2}.$$

Поэтому

$$l_a - l_b > 2c\cos\frac{\angle A}{2}\left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right) = \frac{2c^2\cos\frac{\angle A}{2}}{(c+2)(c+3)}.$$

Возьмем угол C достаточно большим, чтобы выполнялись неравенства $c > 4$, $\cos\frac{\angle A}{2} > 0{,}9$, $\cos\frac{\angle C}{2} < 0{,}1$. Тогда $l_a - l_b > l_c$ и треугольник из биссектрис составить нельзя. С другой стороны, для отношений высот имеем $h_b/h_a = 2/3$, $2/5 < h_c/h_a < 1/2$. Следовательно, $h_b + h_c > h_a > h_b > h_c$ и из высот можно составить треугольник.

6. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, а H – точка пересечения его высот. Так как $\angle CA_0O = \angle CB_0O = \angle CA_1H = \angle CB_1H = 90°$, то CO и CH – диаметры окружностей CA_0B_0 и CA_1B_1 соответственно. Поэтому проекция C на прямую OH лежит на обеих окружностях, т.е. совпадает с M_c (рис.69). Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи.

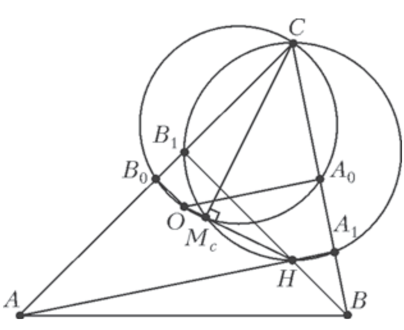


Рис. 69

7. *Первое решение.* Пусть одна сторона угла касается ω и Ω в точках X_1, Y_1, а другая – в точках X_2, Y_2; U, V – точки пересечения X_1X_2 и Y_1Y_2 с AF. Середина отрезка CD лежит на радикальной оси окружностей, т.е. средней линии трапеции $X_1Y_1Y_2X_2$, поэтому $BU = EV$ и $CU = DV$ (рис. 70). Следовательно, $X_1U \cdot X_2U = Y_1V \cdot Y_2V$. Отсюда получаем, что

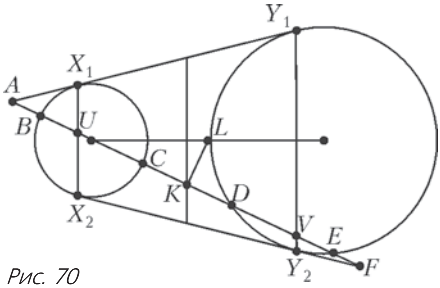


Рис. 70

$FY_2/FX_2 = Y_2V/X_2U = X_1U/Y_1V = AX_1/AY_1$, т.е. $AX_1 = FY_2$. Теперь утверждение задачи вытекает из равенств $AB \cdot AC = AX_1^2 = FY_2^2 = FE \cdot FD$.

Второе решение. Зафиксируем точку A на стороне угла и покажем, что через нее проходит ровно одна прямая, удовлетворяющая условиям задачи. Действительно, середина K отрезка CD равноудалена от проекций центров окружностей на искомую прямую и, значит, совпадает с проекцией середины L отрезка между центрами. Следовательно, K − точка пересечения окружности с диаметром AL и радикальной оси окружностей, отличная от середины отрезка X_1Y_1. С другой стороны, если взять точку F так, что $AX_1 = Y_2F$, то $AB \cdot AC = FE \cdot FD$ и $AD \cdot AE = FC \cdot FB$, откуда следует, что прямая AF − искомая.

8. Докажем, что $n = 4$.

Лемма. *Пусть выпуклый n-угольник разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Тогда у каждого из треугольников разбиения хотя бы одна сторона является стороной (а не диагональю) n-угольника.*

Доказательство леммы. Пусть треугольник разбиения имеет углы $\alpha \le \beta \le \gamma$ с вершинами A, B, C соответственно, причем AC и BC − диагонали n-угольника. К вершине C примыкают еще хотя бы два угла треугольников разбиения. Если хотя бы один из них больше α, то сумма углов при C не меньше $\gamma + \beta + \alpha = \pi$, но она не больше угла выпуклого многоугольника − противоречие. Значит, все углы при C, кроме $\angle ACB$, равны α, причем α строго меньше β.

Рассмотрим второй треугольник разбиения, примыкающий к BC. Так как он равен ΔABC, то против стороны BC в нем лежит угол, равный α. Но угол при C в этом треугольнике также равен α, тогда как он должен равняться β или γ – противоречие. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи.

Так как сумма углов многоугольника P равна $\pi(n-2)$ и они складываются из всех углов треугольников разбиения, то количество этих треугольников равно $n - 2$. По лемме, в каждом из этих треугольников хотя бы одна сторона является стороной P. Отсюда вытекает, что у двух треугольников разбиения по две стороны являются сторонами P.

Пусть KLM – один из этих треугольников, причем KL и LM – стороны P. К стороне KM примыкает другой треугольник разбиения KMN. Одна из его сторон (для определенности KN) является стороной P. Так как треугольники разбиения равны, то $\angle NKM$ равен либо $\angle LKM$, либо $\angle KML$. В первом случае KM – биссектриса угла описанного многоугольника P и потому содержит центр I вписанной окружности. Во втором случае $KN \parallel LM$. Тогда I лежит на общем перпендикуляре к этим отрезкам и потому содержится (по выпуклости) в параллелограмме $KLMN$, а значит – хотя бы в одном из треугольников KLM, KMN.

Пусть $K'L'M'$ – другой треугольник разбиения, две стороны которого являются сторонами P. Аналогично предыдущему, I содержится либо в этом, либо в смежном с ним треугольнике разбиения. Если I содержится хотя бы одном из треугольников KLM, $K'L'M'$, то они имеют общую сторону, и тогда $n = 4$. В противном случае треугольник KMN – смежный с обоими этими треугольниками и содержит I. При этом сторона MN – общая с $\Delta K'L'M'$; можно положить $M = M'$, $N = K'$. Рассуждая как выше, получаем, что $LM \parallel KN \parallel L'M$. Но тогда LM и $L'M$ лежат на одной прямой, тогда как это две стороны выпуклого n-угольника – противоречие.

Из приведенного рассуждения видно, что выпуклый четырехугольник удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда он симметричен относительно одной из своих диагоналей.

10 класс

1. Пусть C' – точка, симметричная C относительно середины AB. Тогда точки A, B, C' и ортоцентр треугольника ABC лежат на одной окружности. С другой стороны, если A_0, B_0 – середины сторон BC, AC, то треугольник A_0B_0C гомотетичен треугольнику ABC' относительно центра тяжести M треугольника ABC с коэффициентом $-1/2$. Следовательно, описанные окружности этих треугольников касаются в точке M (рис.71).

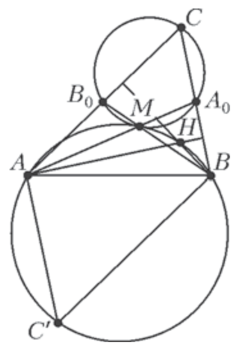


Рис. 71

2. Прежде всего сформулируем следующее утверждение, вытекающее из непосредственного вычисления углов.

Лемма. *Точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда биссектрисы углов, образованных прямыми AB и CD, параллельны биссектрисам углов, образованных прямыми AD и BC.*

Доказательство леммы. Действительно, рассмотрим для определенности случай, когда $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, лучи BA и DC пересекаются в точке E, DA и BC – в точке F. Тогда углы между биссектрисами углов BED и BFD равны полусуммам противоположных углов четырехугольника, откуда, очевидно, следует утверждение леммы. Другие случаи рассматриваются аналогично.

Перейдем к решению задачи. Пусть I центр вписанной окружности, r – ее радиус. Тогда $IC' \cdot IA = r^2 = IA' \cdot IC$, т.е. точки A, C, A', C' лежат на одной окружности. Применяя лемму, получаем, что биссектрисы углов между AA' и CC' параллельны биссектрисам углов между IA и IC, а значит, и углов между перпендикулярными им прямыми KN и LM. Аналогично, биссектрисы углов между BB' и DD' параллельны биссектрисам углов между KL и MN. Еще раз применив лемму, получим утверждение задачи.

3. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Ребра A_1A_2 и B_3B_4 перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикуляры из точек A_1, A_2 на плоскости $B_2B_3B_4$ и $B_1B_3B_4$ соответственно пересекаются.*

Доказательство леммы. Пусть $A_1A_2 \perp B_3B_4$. Тогда существует плоскость, проходящая через A_1A_2 и перпендикулярная B_3B_4. Перпендикуляры из условия леммы лежат в этой плоскости и, значит, пересекаются. Обратно, если перпендикуляры пересекаются, то проходящая через них плоскость перпендикулярна B_3B_4 и содержит A_1A_2.

Пусть теперь $A_1A_2 \perp B_3B_4$, $A_1A_3 \perp B_2B_4$, $A_2A_3 \perp B_1B_4$. Тогда любые два из трех перпендикуляров, опущенных из A_1, A_2, A_3 на соответствующие грани $B_1B_2B_3B_4$, пересекаются. Так как эти перпендикуляры не лежат в одной плоскости, отсюда следует, что они проходят через одну точку. Следовательно, если выполнены условия задачи, то все четыре перпендикуляра из вершин одного тетраэдра на соответствующие грани другого проходят через одну точку, что влечет перпендикулярность шестой пары ребер.

4. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть окружность касается сторон AC, BC треугольника ABC в точках U, V, а описанной около него окружности – изнутри в точке T. Тогда прямая UV проходит через центр I окружности, вписанной в треугольник ABC.*

Доказательство леммы. Пусть прямые TU, TV вторично пересекают описанную окружность в точках X, Y. Так как окружности ABC и TUV гомотетичны с центром T, то X, Y – середины дуг AC, BC, т.е. прямые AY и BX пересекаются в точке I (рис.72). Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Паскаля, примененной к шестиугольнику $AYTXBC$.

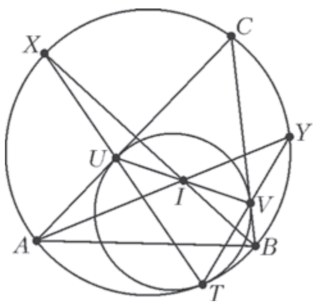


Рис. 72

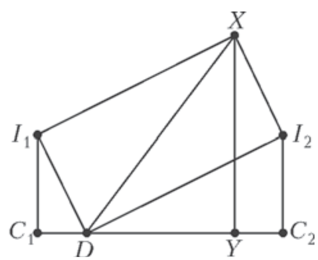


Рис. 73

Из леммы следует, что в условиях задачи DI_1XI_2, где I_1, I_2 – центры вписанных окружностей треугольников ACD, BCD, – прямоугольник (рис.73). Пусть Y, C_1, C_2 – проекции точек X, I_1, I_2 на AB. Тогда

$$BY - AY = BC_2 + C_2Y - AC_1 - C_1Y = (BC_2 - DC_2) - (AC_1 - DC_1) =$$

$$= (BC - CD) - (AC - CD) = BC - AC.$$

Следовательно, Y – точка касания стороны AB с вписанной окружностью.

5. Из условия следует, что радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны AB треугольника ABC, равен высоте h_c, проведенной к этой стороне. Поскольку площадь треугольника $S = (p - c)r_c = ch_c/2$, то

$$c = 2(p - c) = 2p/3.$$

6. Пусть $a > b > c$ – стороны треугольника. Тогда l_2 – биссектриса угла A и

$$S = bc\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{(b+c)l_2\sin(\angle A/2)}{2}.$$

Поэтому правое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\sqrt{3}(b+c)\sin(\angle A/2)}{2} > \frac{2bc\cos(\angle A/2)}{b+c}$$

или

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\angle A}{2} > \frac{4bc}{(b+c)^2}.$$

Но $\pi/6 < A/2 < \pi/2$, следовательно, левая часть больше 1, а правая меньше 1 по неравенству о средних.

Так как $C < \pi/3$, то $\sqrt{3}S < 3ab/4$. С другой стороны,

$$l_1^2 = \frac{4a^2b^2\cos^2(\angle C/2)}{(a+b)^2} = \frac{2a^2b^2(1+\cos\angle C)}{(a+b)^2}.$$

Поскольку $b > c$, $\cos\angle C > a/2b$, т.е. $l_1^2 > a^2b(a+2b)/(a+b)^2$. Поэтому левое неравенство следует из того, что

$$a(a+2b)/(a+b)^2 = 1 - b^2/(a+b)^2 > 3/4.$$

7. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC. Тогда $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$, т.е степени H относительно окружностей AA_1A', BB_1B', CC_1C' равны, причем H лежит внутри этих окружностей. С другой стороны, $\angle BC'O = \angle BAO = \angle OBC_1$, т.е. треугольники $OC'B$ и OBC_1 подобны и $OC_1 \cdot OC' = OB_0^2$ (рис.74). Следовательно, степени O

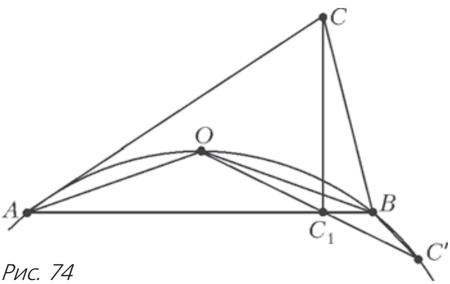


Рис. 74

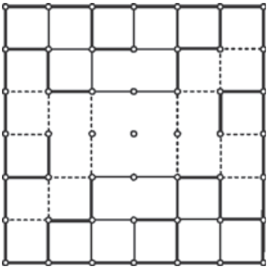


Рис. 75

относительно всех трех окружностей также равны и, значит, эти окружности пересекаются в двух точках, лежащих на прямой OH.

8. Искомая развертка изображена на рисунке 75. Жирные линии обозначают разрезы, тонкие и пунктирные – сгибы вверх и вниз. Центральный квадрат 2×2 соответствует горизонтальной перегородке куба.

VIII ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. Пусть K – середина AC (рис.76). Так как DK – медиана прямоугольного треугольника ADC, то $AK = KD$ и $\angle ADK = \angle A$. С другой стороны, MK – средняя линия треугольника ABC, следовательно, $\angle DMK = \angle B$. Применяя к треугольнику DMK теорему о внешнем угле, получаем, что равенства $KD =$ $= DM$ и $\angle KDA = 2\angle KMD$ равносильны.

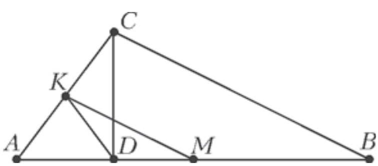


Рис. 76

2. При $n = 4$ и при $n > 5$. Очевидно, что $n > 3$. Ясно также, что при четном n можно разрезать правильный n-угольник на два равных многоугольника диагональю, проходящей через его центр, а потом разрезать эти два многоугольника одинаковым образом. Кроме того, можно на трех сторонах правильного $2k$-угольника построить равные треугольники с вершинами на описанной окружности. Поэтому при нечетном $n > 5$ искомая ситуация тоже возможна. Осталось доказать, что она невозможна при $n = 5$.

Если центр описанной около пятиугольника окружности не лежит ни на одной из проведенных диагоналей, то треугольник, содержащий его, – остроугольный, а остальные – тупоугольные, т.е. описанная ситуация не может иметь места. Если же центр лежит на диагонали, то два треугольника, примыкающие к этой диагонали, – прямоугольные, а третий – тупоугольный. Следовательно, указанная ситуация также невозможна.

3. Так как $B_1I \perp AC$, достаточно доказать, что $\angle YB_1A = \angle XB_1C$. Так как CI – серединный перпендикуляр к

A_1B_1, то $\angle YB_1A_1 = \angle C_1A_1B_1$, а поскольку $\angle A_1B_1C = \angle B_1A_1C$, то $\angle YB_1A = \angle C_1A_1B$ (рис.77). Аналогично $\angle XB_1C = \angle A_1C_1B = \angle C_1A_1B$.

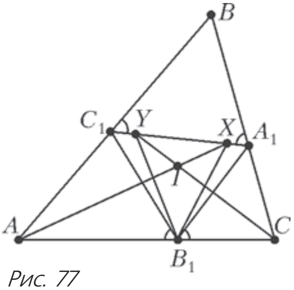


Рис. 77

4. Пусть точка D симметрична B относительно серединного перпендикуляра к AC, а T – точка пересечения AB и CD. Тогда $ACBD$ – равнобокая трапеция, и, значит, треугольник BDT – равнобедренный (рис.78). Так как прямая PM содержит среднюю линию этого треугольника, треугольник QPB тоже равнобедренный.

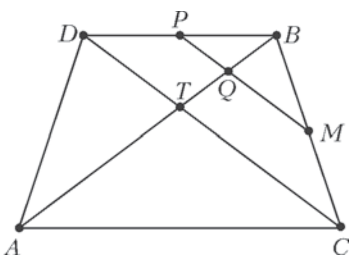


Рис. 78

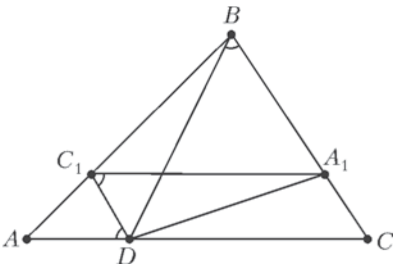


Рис. 79

5. Из условия задачи следует, что $\angle C_1DA = \angle DBC$ и $\angle A_1DC = \angle DBA$ (рис.79). Следовательно, четырехугольник A_1BC_1D – вписанный, т.е. $\angle C_1A_1D = \angle C_1BD = \angle CDA_1$.

6. $135°$.

Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как точка C_1 симметрична B относительно CI, а C_2 симметрична C_1 относительно AI, то $BI = IC_2$ и $\angle BIC_2 = 90°$.

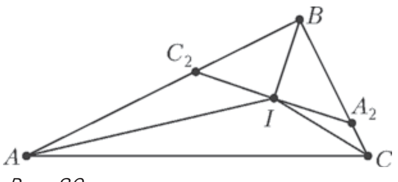


Рис. 80

Аналогично $BI = IA_2$ и $\angle BIA_2 = 90°$ (рис.80). Следовательно, I – середина A_2C_2, а $\angle AIC = 135°$.

7. $60°$.

Пусть AA_1, BB_1 – биссектрисы треугольника, AA_2, BB_2 – его высоты. Из условия задачи следует, что $AA_1/AA_2 = BB_1/BB_2$ и, значит, $\angle A_1AA_2 = \angle B_1BB_2$. Но $\angle A_1AA_2 = |\angle B - \angle C|$, $\angle B_1BB_2 = |\angle A - \angle C|$. Так как треугольник неравнобедренный, равенство $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$ невозможно. Следовательно, $\angle C = (\angle A + \angle B)/2 = 60°$.

8. Так как треугольники ABM, CBM – равнобедренные, точки A_1, C_1 – середины соответствующих катетов. Кроме того, прямая A_1A_2 перпендикулярна биссектрисе угла A и, значит, является биссектрисой угла AA_1C_1 (рис.81). Аналогично, C_1C_2 – биссектриса угла CC_1A_1. Следовательно, точка их пересечения – центр вневписанной окружности треугольника A_1BC_1 – лежит на биссектрисе угла B.

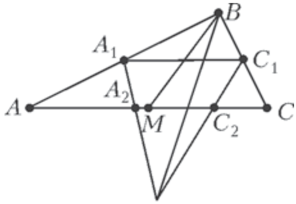


Рис. 81

9. Пусть I – точка пересечения l_b и l_c. Тогда IL_1 – биссектриса угла A. Поэтому нам известны углы между биссектрисами треугольника, а значит, и углы треугольника. Построим произвольный треугольник $A'B'C'$ с такими углами, найдем центр I' вписанной в него окружности, отложим на прямых l_b, l_c отрезки $IB'' = I'B'$, $IC'' = I'C'$ и проведем через L_1 прямую, параллельную $B''C''$. Эта прямая пересечет l_b, l_c в вершинах B, C искомого треугольника. После этого вершина A строится очевидным образом.

10. а) Да; б) нет.

а) Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AC > BC >> AB$. Возьмем на отрезке AC такую точку P, что $AP = BC$, восставим из нее перпендикуляр к AC и возьмем на этом перпендикуляре точку D, лежащую вне треугольника и достаточно близкую к P. Тогда в четырехугольнике $ABCD$ AD – наибольшая сторона, CD – наименьшая, D – наибольший угол, C – наименьший (рис.82).

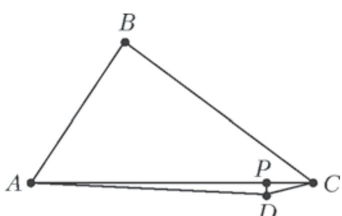


Рис. 82

б) Предположим, что $ABCD$ – четырехугольник, удовлетворяющий условию. Без ограничения общности можно считать, что угол B наибольший, а сторона CD наименьшая. Тогда из равенства

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B =$$

$$= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos\angle D$$

следует, что AD – наибольшая сторона и, значит, C – наименьший угол. Так как $\angle C + \angle D < \pi$, лучи CB и DA пересекаются в некоторой точке P. Так как угол C острый и $\angle C + \angle A < \pi$, то

$\sin\angle A > \sin\angle C$. Поскольку

$$PB/\sin\angle A = AB/\sin\angle P > CD/\sin\angle P = PD/\sin\angle C,$$

из этого следует, что $PB > PD$. Но $PB = PC - BC < PC - CD < PD$ – противоречие.

11. Так как PC – диаметр описанной около треугольника $PA'B'$ окружности, угол PC_1C прямой, т.е. точка C_1 лежит на высоте треугольника ABC. Аналогично точки A_1, B_1 лежат на двух других высотах. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре H и утверждение а) доказано. Кроме того, точки A_1, B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром PH, поскольку углы PA_1H, PB_1H, PC_1H прямые. Следовательно, угол между прямыми A_1C_1 и B_1C_1 равен углу между прямыми HA_1 и HB_1, который как угол между высотами треугольника ABC равен углу между его сторонами AC и BC. Таким образом, углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, т.е. эти треугольники подобны.

12. Из равенства $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C = 1 + r/R$ следует, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от O до сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей. Поэтому из условия задачи следует, что прямая PQ проходит через центр I вписанной окружности. Тогда $\angle PIB = \angle IBA = \angle IBP$ и $PB = IP$. Аналогично $QC = IQ$.

13. Окружность с центром в середине AB и радиусом, равным $AB\sqrt{3}/2$ без точек пересечения с прямой AB.

Пусть медианы AA_0 и BB_0 треугольника пересекаются в точке M. Из условия задачи следует, что $AM \cdot AA_0 = AB_0 \cdot AC$, т.е. $AA_0^2 = \dfrac{3}{4}AC^2$. Аналогично, $BB_0^2 = \dfrac{3}{4}BC^2$. Поскольку в любом треугольнике отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон равно $3/4$, из этих равенств следует, что медиана из вершины C равна $AB\sqrt{3}/2$. Нетрудно видеть, что любая точка окружности, кроме точек пересечения с прямой AB, входит в искомое ГМТ.

14. Пусть P – точка пересечения AB и MO. Применяя теорему Менелая к треугольникам ABC и ABD, получаем

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BO}{OD}\cdot\frac{DE}{AE} = \frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CO}{OA} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{OA\cdot OB}{OC\cdot OD} = \frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta CDO}}.$$

15. Пусть прямые, симметричные l, пересекаются в точке P. Тогда точки, симметричные P, лежат на l, а значит, проекции P на стороны треугольника лежат на одной прямой. Следовательно, по теореме Симсона P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Кроме того, так как прямая Симсона точки P делит пополам отрезок между P и ортоцентром H треугольника ABC, то l проходит через H.

16. *Первое решение.* Так как четырехугольник $BMKC$ вписанный, то $\angle BMK = 90°$ и O лежит на BK. Поэтому $\angle ABL = \angle MBK = \angle MCK = \angle A$. Значит, $\angle MAL = \angle B$, а угол между прямыми AL и KM равен углу A, т.е. углу ACM (рис.83).

Второе решение. Так как угол KCB прямой, то O лежит на KB. Так как AB – диаметр описанной около треугольника ABC окружности, то угол ALB также прямой. Угол KMB прямой, поскольку KCB прямой. А тогда K – точка пересечения высот треугольника из точек A, B и

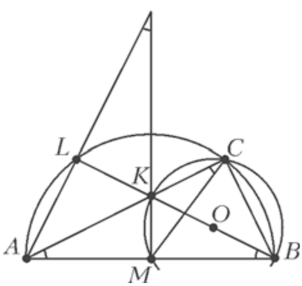


Рис. 83

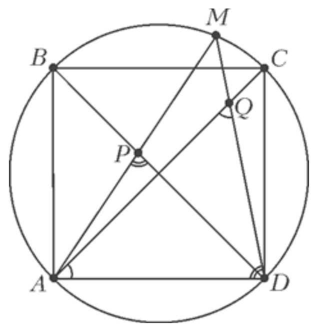


Рис. 84

точки пересечения AL с MK. Значит, два прямых угла с вершинами C и M опираются на один и тот же диаметр и все доказано.

17. Так как $\angle AMD = 45° = \angle OAD = \angle ODA$, то $\angle AQD = = \angle AMD + \angle MAQ = \angle PAD$. Аналогично, $\angle APD = \angle ADQ$ (рис.84). Следовательно, треугольники APD и QDA подобны, т.е. $AQ \cdot PD = AD^2$, что равносильно утверждению задачи.

18. Проведем прямую через отмеченные точки. Она пересечет две стороны треугольника (скажем, AB и AC) и продолжение третьей (скажем, за вершиной C). Тогда AB – наибольшая сторона треугольника, BC – наименьшая и центром вписанной окружности является та из отмеченных точек, которая ближе к BC.

Докажем сделанные утверждения. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника, O – центр описанной. Соединим их с вершинами треугольника и вычислим углы. Получим, что O лежит в треугольнике, образованном наибольшей стороной и I, а I лежит в треугольнике, образованном наименьшей стороной и O. Значит, прямая OI пересекает наибольшую и наименьшую стороны треугольника и, следовательно, пересекает продолжение средней стороны. При этом O лежит ближе к наибольшей стороне, а I – к наименьшей.

Остается узнать, с какой стороны OI пересекает продолжение средней стороны AC. Для этого надо сравнить длину перпендикуляров из O и I на прямую AC. Если r и R – радиусы вписанной и описанной окружности, то перпендикуляр из I равен r, а перпендикуляр из O равен $R\cos 59^\circ > R/2 > r$, откуда следует ответ.

19. 150°.

Из условия следует, что расстояние между центрами окружностей равно $\sqrt{3}$, значит, по формуле Эйлера эти окружности для треугольника $A'B'C$ являются описанной и вневписанной, т.е. $A'B'$ касается второй окружности в точке C', лежащей на прямой CZ (рис.85).

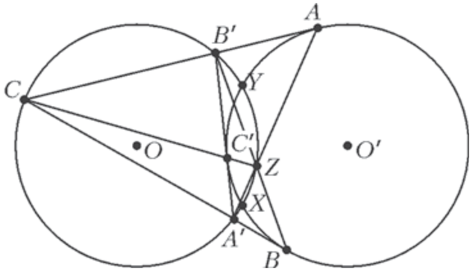


Рис. 85

Пусть O, O' – центры окружностей. Тогда

$$\angle A'O'A = \angle AO'C' + \frac{1}{2}\angle C'O'B = 2\angle ABC' + \angle C'AB =$$

$$= \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle C'A'B',$$

$$\angle O'A'O = \angle O'A'B' + \angle B'A'O = \frac{\pi}{2} - \angle C'O'A' + \frac{\pi}{2} - \angle BCA =$$

$$= \pi - \angle BCA - \frac{1}{2}\angle CA'B' = \angle CB'A' + \frac{1}{2}\angle CA'B',$$

и, так как $O'A = OA'$, то $AO'A'O$ – равнобедренная трапеция. Поэтому $\angle O'AA' = \angle A'OO'$ и, аналогично, $\angle O'BB' = \angle B'OO'$.

Следовательно, $\angle A'ZB' = 2\pi - \angle AO'B - \angle A'OB' = \pi - \angle C$, т.е. точка Z лежит на описанной окружности треугольника и $\angle XZY = 150°$.

Примечание. Доказать, что Z лежит на окружности, можно и по-другому. При изогональном сопряжении относительно треугольника $A'B'C$ Z перейдет в центр гомотетии окружностей, который в силу равенства их радиусов является бесконечно удаленным.

20. *Первое решение.* Пусть I_1, J_1, I_2, J_2 − центры ω_1, Ω_1, ω_2, Ω_2, а K_1, K_2 − точки пересечения прямых I_1J_1, I_2J_2 с AB (рис.86). Тогда $I_1K_1/I_1C = J_1K_1/J_1C$, $I_2K_2/I_2C = J_2K_2/J_2C$ и, дважды применив к треугольнику CK_1K_2 теорему Менелая, получим, что прямые I_1I_2 и J_1J_2 пересекают AB в одной и той же точке. Через эту точку проходят и общие внешние касательные.

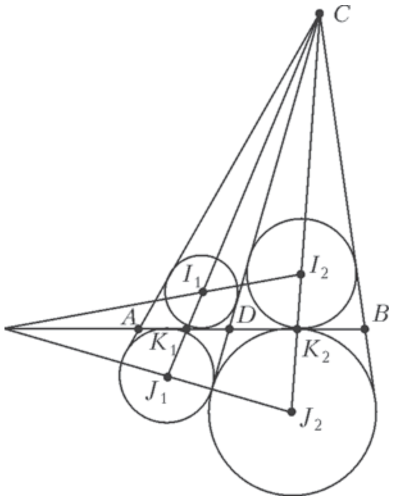


Рис. 86

Второе решение. Возьмем пересечение общих внешних касательных к окружностям ω_1 и Ω_2 − точку P. Тогда, применяя теорему о трех колпаках для троек окружностей ω_1, Ω_1, Ω_2 и ω_1, ω_2, Ω_2, получаем, что точки пересечения общих внешних касательных сначала к окружностям Ω_1 и Ω_2, а потом к ω_1 и ω_2 являются точкой пересечения прямой PC с прямой AB, т.е. совпадают и лежат на AB.

21. Пусть одна из прямых пересекает BC, CA, AB в точках X_a, X_b, X_c, а другая − в точках Y_a, Y_b, Y_c (рис.87). Тогда $\angle HY_aB = \angle X_bHA$ и $\angle HX_bA = \angle Y_aHB$, так как стороны этих углов перпендикулярны. Поэтому треугольники HBY_a и X_bAH подобны. Аналогично, подоб-

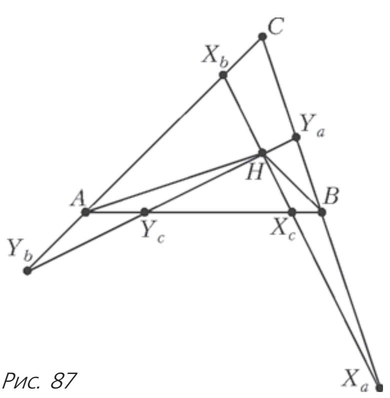


Рис. 87

ны треугольники HX_aB и Y_bAH. Значит, $AX_b \cdot BY_a = AH \cdot BH = AY_b \cdot BX_a$. С другой стороны, применив теорему Менелая к треугольникам CX_aX_b, CY_aY_b и прямой AB, получим

$$\frac{CA}{AX_b} \cdot \frac{X_bX_c}{X_cX_a} \cdot \frac{X_aB}{BC} = \frac{CA}{AY_b} \cdot \frac{Y_bY_c}{Y_cY_a} \cdot \frac{Y_aB}{BC} = 1.$$

Из этих трех равенств следует утверждение задачи.

22. Пусть K, L – точки касания ω с AB и большой окружностью. Так как L – центр гомотетии окружности, а касательные к ним в точках K и N параллельны, точки L, K, N лежат на одной прямой. При этом $\angle KAN = \angle NLA$, так как эти углы опираются на равные дуги. Значит, треугольники KAN и ALN подобны и $AN^2 = NK \cdot NL = NC^2$, т.е. четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром N (рис.88). Относительно этой окружности прямая XY является полярой точки пересечения AB и CD. При этом, поскольку $\angle NAM = \angle NBM = \angle NCI = \angle NDI = 90°$, точки M и I являются полюсами прямых AB и CD и, следовательно, лежат на XY.

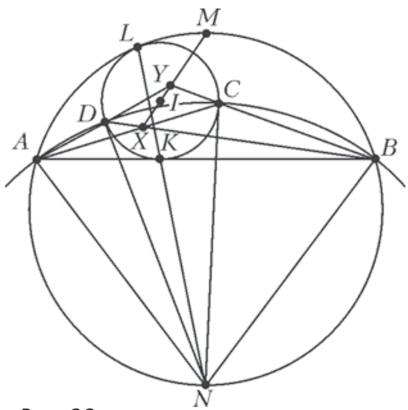


Рис. 88

23. Прежде всего, заметим, что множеством середин отрезков, концы которых лежат на двух диагоналях квадрата, будет квадрат с вершинами в серединах сторон исходного. Поэтому множеством центров тяжести четырех точек, лежащих на диагоналях двух противоположных граней куба, будет квадрат с вершинами в центрах четырех остальных граней. Таким образом, задача равносильна определению ГМТ – центров тяжести трех точек, каждая из которых выбирается в одном из трех таких квадратов. Очевидно, что все такие центры тяжести лежат в октаэдре, образованном центрами граней куба. Кроме того, если одна из точек лежит в центральной плоскости этого октаэдра, а две другие удалены от этой плоскости на расстояние, не превышающее половины ребра куба, то расстояние от центра тяжести до плоскости не может быть больше трети ребра. Значит, все центры тяжести лежат в многограннике, полученном в результате отсечения от октаэдра шести четырехугольных пирамидок с ребрами, равными одной трети ребра октаэдра. С другой стороны, все вершины этого многогранника, а значит, и все его внутренние точки принадлежат искомому ГМТ.

24. $n(n-1)/2$.

Так как выпуклые оболочки двух подмножеств не пересекаются, они лежат по разные стороны от некоторой прямой. Таким образом, требуется узнать, сколькими способами данное множество точек можно разделить прямой на два подмножества. Возьмем в плоскости точку O, не лежащую ни на одной из прямых, соединяющих данные точки, и рассмотрим полярное соответствие с центром O. Данным точкам будут соответствовать n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По индукции легко доказать, что эти прямые делят плоскость на $n(n+1)/2+1$ частей, из которых $2n$ неограниченных.

Лемма. *Пусть поляры a, b точек A, B делят плоскость на 4 угла. Тогда полюса прямых, пересекающих отрезок AB, лежат в двух вертикальных углах, а полюса прямых, не пересекающих отрезок AB, – в двух других углах.*

Действительно, пусть прямая l пересекает прямую AB в точке X. Тогда поляра X проходит через точку пересечения a и b. Если вращать l вокруг X, то ее полюс будет двигаться по этой прямой, т.е. внутри пары вертикальных углов, образованных a и b. При движении точки X по AB ее поляра вращается вокруг точки пересечения a и b, переходя из одной пары вертикальных углов в другую в моменты прохождения X точки A или B. Лемма доказана.

Вернемся к задаче. Из леммы следует, что две прямые разбивают данное множество точек одинаковым образом тогда и только тогда, когда их полюсы либо лежат в одной из частей, на которые плоскость разбивается полярами данных точек, либо лежат по разные стороны от всех n прямых. Но второй случай возможен тогда и только тогда, когда обе точки лежат в неограниченных областях. Действительно, если точки P, Q лежат по разные стороны от всех прямых, то каждая из этих прямых пересекает отрезок PQ. Значит, каждый из продолжающих этот отрезок лучей целиком лежит в одной части. Обратно, если точка P лежит в неограниченной части, то возьмем луч с началом в ней, целиком лежащий в этой части и не параллельный ни одной из n прямых. Точки противоположного луча, лежащие дальше от P, чем все точки пересечения с прямыми, лежат по разные стороны с P от этих прямых.

Таким образом, $2n$ неограниченных областей разбиваются на пары, каждой из которых соответствует один способ разбиения данного множества точек, а каждой из остальных областей соответствует свой способ разбиения. Всего получаем $n(n-1)/2+1$ способов, при одном из которых все n точек попадают в одно подмножество.

Финальный тур

8 класс

1. $90°$.

Пусть L – точка пересечения NK и BC (рис. 89). Из симметрии относительно BC видим, что $AM = MC = CN$ и $\angle MCB = \angle NCB$. Далее, из $LN \parallel AC$ получаем $\angle CNL = \angle LCM$, а значит, треугольник CNL равнобедренный, и $LN = CN = AM$. Итак, отрезки AM и LN параллельны и равны, поэтому $ALNM$ – параллелограмм, и $AL \parallel MN \perp LC$. Наконец, из симметрии относительно BM получаем $\angle AKC = \angle ALC = 90°$.

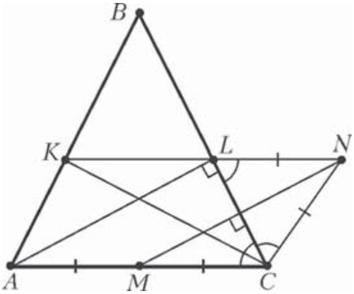


Рис. 89

2. *Первое решение.* Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда

$$\angle B'IC' = 180° - (\angle IBC + \angle ICB) = 90° + \frac{1}{2}\angle B'AC'.$$

Значит, если O – центр окружности ω, описанной около ΔBCI, то $\angle B'OC' = 180° - \angle B'AC'$. Таким образом, можно построить точку O, а затем – точку I (как точку пересечения меньшей дуги $B'C'$ окружности ω с биссектрисой угла $B'AC'$, рис.90). Теперь точки B и C строятся как пересечение прямых $B'C$, AC' и $C'I$, AB' соответственно.

Второе решение. Так как BB' – биссектриса угла B, точка B' равноудалена от прямых BC и AB. Поэтому окружность с центром B', касающаяся AC', касается также BC. Аналогично, прямая BC касается окружности

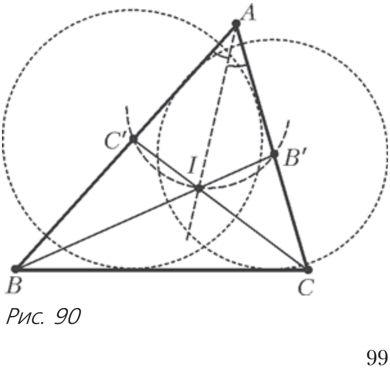


Рис. 90

с центром C', касающейся AB' (см. рис.90). Следовательно, для восстановления точек B и C достаточно провести общую внешнюю касательную к этим двум окружностям (лежащую по другую сторону от $B'C'$, чем A) и найти точки ее пересечения с AB' и AC'.

3. Пусть квадрат $ABCD$ перегнули по прямой XY; обозначим получившиеся точки, как показано на рисунке 91. Заметим, что в прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, точки ее касания с катетами и вершина прямого угла образуют квадрат, поэтому ее радиус равен отрезку касательной из этой вершины. Значит, диаметры окружностей, вписанных в треугольники UDX, UAP и PVY, равны соответственно $d_1 = UD + DX - XU$, $d_2 = UA + AP - UP$ и $d_3 = PV + VY - PY$. Обозначив сторону квадрата через a и заметив, что $UX = XC$ и $VY = YB$, получаем

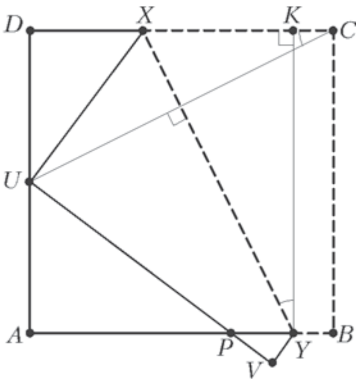


Рис. 91

$$d_1 + d_3 - d_2 = DU + (a - CX) - CX + PV + BY - PY -$$

$$-(a - DU) - (a - PY - BY) + (a - PV) = 2(DU + BY - CX).$$

Опустим перпендикуляр YK на CD. Точки C и U симметричны относительно XY, поэтому $XY \perp CU$, и $\angle DCU = \angle KYX$. Кроме того, $KY = CD = a$. Следовательно, прямоугольные треугольники CDU и YKX равны, поэтому $DU = KX = CX - CK = CX - BY$. Это и значит, что $d_1 + d_3 - d_2 = 0$.

Замечание. В первой части решения можно рассуждать по-другому. Прямоугольные треугольники DXY, VYP и AUP подобны; значит, радиусы вписанных в них окружностей относятся так же, как соответствующие катеты. Поэтому достаточно доказать равенство $DX + VY = AU$, или $DX + CK = a - DU$. Но из второй части решения следует, что $DU = KX$, откуда и следует требуемое.

4. Выберем на луче BC точки X и Q' такие, что $BX = BP$, $BQ' = BP + BQ$. Тогда треугольник BPX – равнобедренный с углом $60°$, значит, он равносторонний, и $PX = BP$, $\angle PXQ' = 120°$. Тогда треугольники PBQ и PXQ' равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $PQ' = PQ$ и $\angle PQ'B = \angle PQB$. Аналогично, выбрав на луче BA точку P' такую, что $BP' = BP + BQ$, получаем, что $PQ' = QP$ и $\angle QP'B = \angle QPB$ (рис.92).

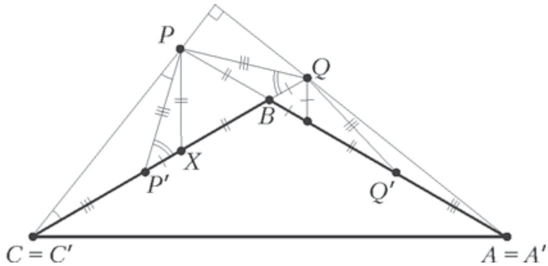


Рис. 92

Отложим теперь на продолжениях отрезков BP' и BQ' за точки P' и Q' отрезки $Q'A' = P'C' = PQ$. Тогда

$$BA' = BP' + P'A' = BP + BQ + PQ = BQ' + Q'C' = BC'.$$

Далее, треугольники $QP'A'$ и $PQ'C'$ равнобедренные, поэтому

$$\angle P'Q'Q + \angle Q'C'P =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle QP'B + \angle PQ'B) = \frac{1}{2}(\angle BPQ + \angle BQP) = 30^\circ.$$

Значит, угол между прямыми QA' и PC' равен

$$180^\circ - (\angle P'A'Q + \angle Q'C'P + \angle BA'C' + \angle BC'A') = 90^\circ.$$

Но если $BA' = BC' < BA$, то этот угол должен быть меньше 90°, а если $BA' > BA$, то больше. Значит, $A' = A$, $C' = C$, и $\angle PQB = \angle PQ'B = 2\angle PCQ'$, что и требовалось доказать.

5. Да.

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD = BD = CD = x$, $AB = BC = y < x/4$, а P – такая точка на диагонали BD, что $PD = y$ (рис.93). Тогда $PB + PD = BD = x$, $PA = PC > AD - PD = x - - y$, следовательно, $PA + PB + PC + PD > 3x - 2y > 2x + 2y = AB + BC + CD + DA$.

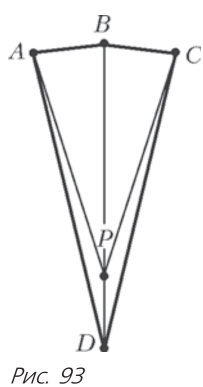


Рис. 93

6. Пусть H – вторая точка пересечения ω с прямой CB_1. Поскольку AW – биссектриса равнобедренного треугольника AB_1C, имеем $B_1H \perp AW$.

Далее, если точки C и W лежат по одну сторону от AH, то

$$\angle AWH = \angle ACH = 90^\circ - \angle CAW = 90^\circ - \angle WAB\,,$$

т.е.

$$WH \perp AB_1$$

(рис.94). Если они лежат по разные стороны, то

$$\angle AWH = 180^\circ - \angle CH = 90^\circ + \angle WAB\,,$$

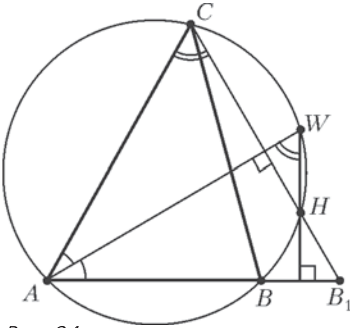


Рис. 94

откуда опять же следует $WH \perp AB_1$. Наконец, если эти точки совпадают, то треугольник AWB_1 прямоугольный, и $H = W$ – его ортоцентр.

Итак, в любом случае точка H лежит на двух высотах треугольника AWB_1, т.е. является его ортоцентром.

7. *Первое решение.* Пусть K – середина AC. Так как $KQ \parallel BC$, то KQ делит высоту AA_1 пополам. Значит, в четырехугольнике AKA_1Q диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам, т.е. он – ромб. Кроме того, из симметрии $HQ = HK$.

Аналогично, пусть R – точка, симметричная K относительно CC_1; тогда CKC_1R – ромб, и $HQ = HR$ (рис. 95). Значит, отрезки A_1Q, AK, KC и C_1R параллельны и равны, откуда QA_1RC_1 – параллелограмм, а тогда P – середина RQ. Значит, HP – медиана в равнобедренном треугольнике HQR, а значит, и высота, что и требовалось доказать.

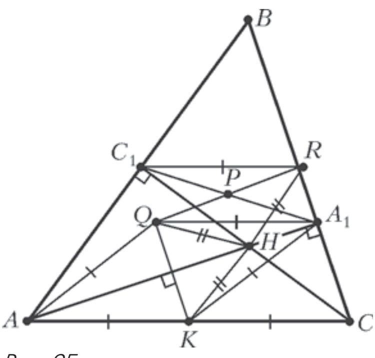


Рис. 95

Второе решение. Пусть L – середина AA_1. Тогда PL – средняя линия треугольника AA_1C, поэтому $\angle PLH = \angle BAA_1$ и, следовательно, $\angle PLQ = 90^\circ - \angle PLH = \angle C_1HA$. С другой стороны, точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC, поэтому треугольники A_1C_1H и CAH подобны; значит, их медианы HP и HK образуют равные углы со сторонами HC_1 и HA соответственно. Значит, $\angle QHA = \angle KHA = \angle PHC_1$ и поэтому $\angle PHQ = \angle C_1HA$ (рис.96). Итак, $\angle PHQ = \angle C_1HA = \angle PLQ$, следовательно, точки P, Q, L, H лежат на одной окружности и $\angle QPH = 180° - \angle QLH = 90°$.

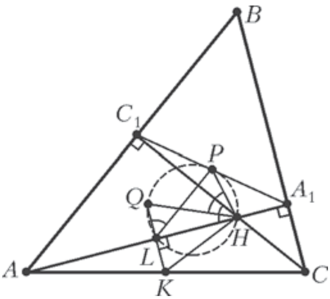


Рис. 96

8. Пусть квадрат разрезан на n многоугольников. Тогда каждый из этих многоугольников имеет не более одной стороны на каждой из сторон квадрата; с любым же из остальных многоугольников разбиения он граничит не более чем по одной стороне. Следовательно, всего у него может быть не более $4 + (n-1) = n + 3$ сторон.

Итак, количество сторон любого многоугольника разбиения не меньше 3 и не больше $n + 3$. Значит, если среди них нет треугольника, то количества их сторон должны быть равны 4, 5, …, $n + 3$. Но тогда $(n+3)$-угольник должен примыкать ко всем сторонам квадрата. Поэтому каждый из остальных многоугольников может примыкать не более чем к двум сторонам квадрата и, следовательно, иметь не более $2 + (n-1) = n + 1$ стороны. Значит, среди многоугольников разбиения нет $(n+2)$-угольника. Противоречие.

9 класс

1. Поскольку $\angle CAA_1 = 90° - \angle ACB = \angle CBB_1$, прямоугольные треугольники OA_1B и OB_1A подобны (рис.97). Значит, их высоты A_1A_2 и B_1B_2 делят отрезки OB и OA в одном и том же отношении. Отсюда по обратной теореме Фалеса получаем утверждение задачи.

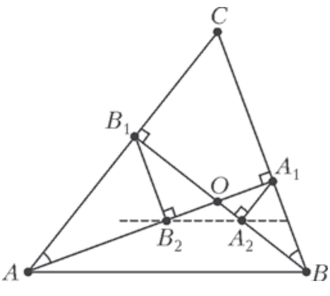


Рис. 97

2. Проведем через A_1, B_1 и C_1 прямые a, b и c, параллельные соответственно BC, CA и AB; покажем, что они вторично пересекают описанную окружность в одной и той же точке. Действительно, пусть c пересекает окружность вторично в точке P (если она касается окружности, то $P = C_1$). Тогда, поскольку $AB \parallel C_1P$ и $AA_1 \parallel CC_1$, получаем

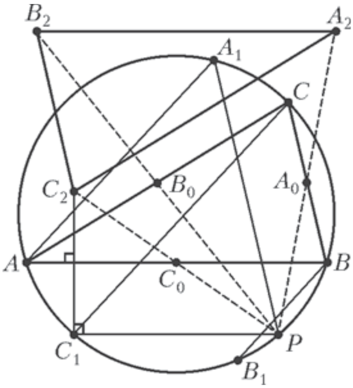


Рис. 98

$\cup BP = \cup C_1A = \cup A_1C$ (здесь через $\cup XY$ обозначается величина дуги, проходимой от X к Y по часовой стрелке). Это и означает, что $A_1P \parallel BC$, т.е. a проходит через P. Аналогично, b проходит через P (рис.98).

Далее, точки C_1 и P симметричны относительно серединного перпендикуляра к AB, а точки C_1 и C_2 симметричны относительно AB; это значит, что P и C_2 симметричны относительно середины C_0 отрезка AB; аналогично, A_2 и B_2 симметричны точке P относительно середин A_0 и B_0 соответствующих сторон треугольника ABC. Таким образом, $\overrightarrow{A_2B_2} = 2\overrightarrow{A_0B_0} = -\overrightarrow{AB}$; аналогично, $\overrightarrow{A_2C_2} = -\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_2C_2} = -\overrightarrow{BC}$. Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ центрально симметричны, и прямые, соединяющие их соответствующие вершины, проходят через центр симметрии.

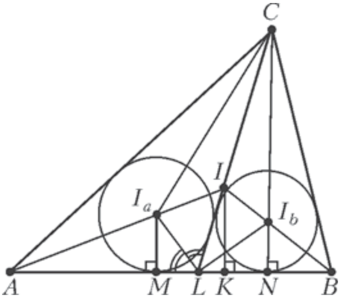


Рис. 99

3. *Первое решение.* Пусть K – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AB (точка K лежит на отрезке MN; рис.99). Заметим, что

$$MK = AK - AM =$$

$$= \frac{AB + AC - BC}{2} - \frac{AL + AC - LC}{2} = \frac{BL + LC - BC}{2} = LN.$$

Далее, пусть I_a, I_b и I – центры окружностей ω_a, ω_b и ω, вписанных в треугольники ACL, BCL и ABC соответственно. По свойству биссектрисы и теореме Фалеса имеем $\frac{AL}{IL} = \frac{AI_a}{I_aI} = \frac{AM}{MK}$, т.е. $IL = \frac{AL \cdot MN}{AM}$.

Итак, мы можем последовательно построить точку K, затем I (как пересечение окружности с центром в L и перпендикуляра к

MN в точке K), I_a и I_b (как пересечение биссектрис углов ALI и CLI с перпендикулярами к отрезку MN в его концах), окружности ω_a и ω_b, и, наконец, точки C (как пересечение касательных к ω_a из A и L) и B (как пересечение MN с касательной к ω_b из точки C).

Второе решение. Докажем равенство $1/AM + 1/ML = 1/LN + 1/NB$. Обозначим через $x = AC$, $y = CL$, $z = LA$ длины сторон треугольника ACL, через p, S и r – его полупериметр, площадь и радиус вписанной окружности соответственно, а через h – его высоту из вершины C. Тогда

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{p-y}+\frac{1}{p-x}=\frac{z}{(p-x)(p-y)}.$$

Далее, из формулы Герона получаем

$$(p-x)(p-y)=\frac{S^2}{p(p-z)}=\frac{rp\cdot zh/2}{p(p-z)},$$

откуда

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{ML}=\frac{2(p-z)}{rh}=\frac{2}{h\operatorname{tg}(\angle ACL/2)}.$$

В треугольнике BCL угол при вершине C и высота из этой вершины такие же, откуда и следует искомое равенство.

Таким образом, зная отрезки AM, ML, LN, мы можем найти отрезок NB и построить точку B. Далее, из соотношений $AC - CL = AM - LM$ и $BC - CL = BN - LN$ мы находим разность $AC - BC = AM - LM - BN + LN = p$, а из равенства $AC/BC = AL/BL = q$ – их отношение. Из этих двух условий можно найти длины сторон $AC = \dfrac{p}{q-1}$ и $BC = \dfrac{pq}{q-1}$, а значит – и построить точку C.

4. При четных.

Первое решение. Если $n = 2k$, то k главных диагоналей разрезают правильный n-угольник на n равных треугольников.

Пусть теперь n нечетно; предположим, что правильный n-угольник P получилось разрезать требуемым образом. Рассмотрим треугольники разрезания, в которых одна из сторон является стороной P. Против этих равных сторон в каждом таком треугольнике лежит одинаковый угол α. Пусть остальные два угла треугольника равны β и γ. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть эти углы не равны между собой, скажем, $\beta < \gamma$. Назовем сторону n-угольника β-стороной или γ-стороной в соответствии с тем, какой угол примыкает к ее левому концу (если смотреть изнутри). Выберем некоторую β-сторону

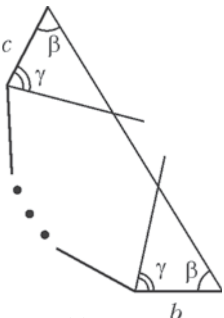


Рис. 100

b и в примыкающем треугольнике разрезания рассмотрим сторону угла β, лежащую внутри P. Она лежит на диагонали, и на другом конце эта диагональ также образует угол β с некоторой стороной c многоугольника (рис.100). Этот угол не может быть разрезан на углы другими диагоналями; действительно, иначе угол разбиения, примыкающий к c, должен быть равен β или $\beta > \gamma$, но он меньше, чем β – противоречие. Итак, наш угол β принадлежит треугольнику, примыкающему к γ-стороне. Наоборот, рассматривая угол β, примыкающий к произвольной γ-стороне c, мы найдем β-сторону b, сопоставленную ей. Итак, β- и γ-стороны разбиваются на пары, и общее их количество четно; противоречие.

Случай 2. Пусть теперь $\beta = \gamma$, и в треугольнике разрезания ABC, содержащем «нижнюю» сторону AB многоугольника, угол при C равен α. Вертикальный к этому угол, равный α, лежит в некотором другом треугольнике разрезания, а против него – сторона, равная и параллельная AB. По другую сторону от нее в некотором треугольнике разрезания лежит угол, равный α, и т.д. Получилась цепочка треугольников (рис.101); рассмотрим последний треугольник UVW этой цепочки. Если он ориентирован не так, как ABC, то его верхняя сторона, равная и параллельная AB, является стороной P, а тогда n четно, поскольку в правильном нечетноугольнике нет параллельных сторон. В противном случае угол при верхней вершине W треугольника UVW равен α, и W – вершина P. Тогда обе стороны UV и VW либо являются сторонами P, либо лежат на диагоналях. В первом случае получаем $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, и угол n-угольника также равен $60°$, откуда $n = 3$ вопреки условию. Во втором же случае угол n-угольника при вершине W содержит как минимум угол α и два угла по β, откуда $\alpha + 2\beta < 180°$. С другой стороны, $\alpha + 2\beta = 180°$ как сумма углов треугольника. Противоречие.

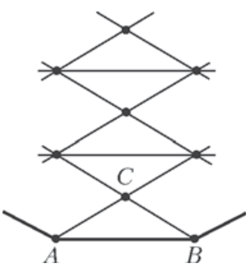


Рис. 101

Второе решение. Приведем другое доказательство того, что при нечетном n указанное разрезание невозможно. Так как n нечетно, никакие две диагонали не перпендикулярны. Поэтому через любую точку пересечения двух диагоналей должна проходить по крайней мере еще одна диагональ (в противном случае образованные диагоналями смежные углы равны двум разным углам одного треугольника, что невозможно). Докажем теперь, что из каждой вершины многоугольника выходит не меньше двух диагоналей.

Предположим, что из вершины A_i не выходит ни одной диагонали. Тогда треугольником, содержащим эту вершину, будет $A_{i-1}A_iA_{i+1}$, и один из углов треугольника разбиения равен углу n-угольника. Но тогда каждая сторона n-угольника лежит в треугольнике разбиения, содержащем еще одну его сторону. Значит, стороны разбиваются на пары, что невозможно.

Предположим теперь, что из вершины A_i выходит одна диагональ. Тогда она делит угол при этой вершине на два неравных угла $\beta < \gamma$. Оба эти угла примыкают к сторонам n-угольника; значит, в любом треугольнике разбиения к стороне, равной стороне n-угольника, примыкают углы, равные β и γ. Итак, сумма всех углов треугольников разбиения, примыкающих к сторонам n-угольника, равна $n(\beta+\gamma)$, что равно сумме углов n-угольника. Значит, из каждой вершины выходит ровно одна диагональ, что опять же невозможно в силу нечетности n. Утверждение доказано.

Итак, пусть n-угольник разрезан на k треугольников; сумма всех их углов равна $180^\circ \cdot k$. Вклад углов n-угольника в эту сумму равен $180^\circ(n-2)$, значит, сумма углов при точках пересечения диагоналей равна $180^\circ(k-n+2)$; каждая такая точка добавляет 360°, поэтому количество этих вершин равно $(k-n+2)/2$. Поскольку каждая такая точка принадлежит по крайней мере шести треугольникам, а каждая вершина многоугольника – трем, то общее число треугольников не меньше, чем $\left(3(k-n+2)+3n\right)/3 = k+2 > k$ – противоречие.

5. 45°.

Пусть L – проекция M на AB. Заметим, что

$$\frac{ML}{CN} = \frac{AL}{BK} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

поэтому и

$$\frac{LD}{CK} = \frac{AL+AD}{BK+BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, прямоугольные треугольники MLD и NCK подобны, и $\angle MDL = \angle NKC$ (рис.102). Поэто-

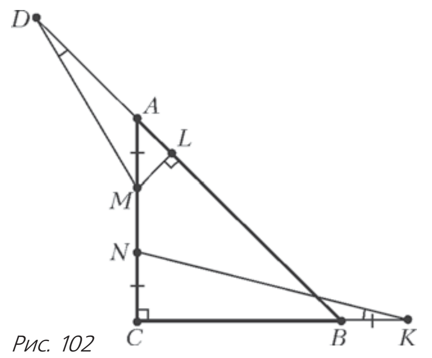


Рис. 102

му угол между прямыми NK и MD равен углу между прямыми KC и LD, т.е. $45°$.

6. $\dfrac{ab}{a+b}$.

Пусть K – такая точка на отрезке AC, что $MK \perp BC$. Тогда $\angle MCA = \angle MCB = \angle CMK$, поэтому $MK = KC$; кроме того, из симметрии $KC = MB$. Далее, по теореме Фалеса и свойству биссектрисы имеем $\dfrac{CK}{AK} = \dfrac{BM}{AM} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{DN}{AN}$. Следовательно, $KN \parallel CD$; аналогично предыдущему, получаем $KN = KC$. Таким образом, K – центр описанной окружности треугольника CMN, а ее радиус по теореме о биссектрисе равен $KC = MB = = ab/(a+b)$ (рис.103).

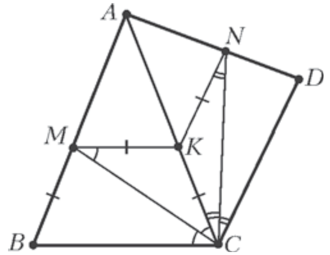


Рис. 103

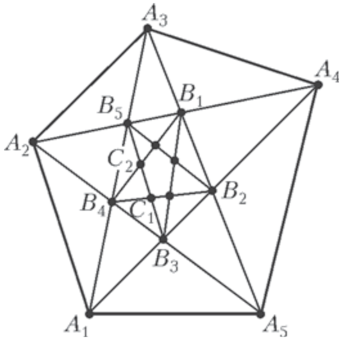


Рис. 104

7. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ – исходный пятиугольник, $B_1B_2B_3B_4B_5$ – пятиугольник, образованный его диагоналями, а $C_1C_2C_3C_4C_5$ – пятиугольник, образованный диагоналями $B_1B_2B_3B_4B_5$ (рис.104). Продолжим нумерацию вершин циклически (т.е. $A_{i+5} = A_i$ и т.д.). Для удобства будем обозначать площадь многоугольника P через $[P]$.

Заметим, что

$$N' = \sum_i [B_iB_{i+1}B_{i+2}] - [B_1B_2B_3B_4B_5],$$

поскольку в сумме справа как раз пятиугольник $C_1C_2C_3C_4C_5$ учтен с кратностью -1, треугольники вида $B_iB_{i+1}C_{i+3}$ – с коэффициентом 1, а треугольники вида $C_iC_{i+1}B_{i+3}$ – с нулевым коэффициентом. Значит, требуемое неравенство равносильно неравенству

$$\sum_i [A_iA_{i+1}B_{i+3}] > \sum_i [B_iB_{i+1}B_{i+2}].$$

Докажем, что $\left[A_iA_{i+1}B_{i+3}\right] > \left[B_{i+2}B_{i+3}B_{i+4}\right]$; тогда, сложив пять неравенств такого вида, получим требуемое.

Ясно, что достаточно это доказать при $i = 1$. Присоединив к каждому из треугольников $A_1A_2B_4$ и $B_3B_4B_5$ треугольник $A_1B_3B_4$, получим треугольники $A_1B_3A_2$ и $A_1B_3B_5$ с общим основанием A_1B_3. При этом расстояние от точки B_5 до этого основания меньше, чем от точки A_2; значит, $\left[A_1B_3A_2\right] > \left[A_1B_3B_5\right]$, что и требовалось доказать.

8. Пусть O – центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Из прямоугольных треугольников ABH и ACH имеем $AK \cdot AB = AH^2 = AL \cdot AC$, т.е. $AK/AL = AC/AB$. Значит, треугольники ALK и ABC подобны, т.е. $\angle AKL = \angle ACB$. Поскольку $\angle OAB = \pi/2 - \angle ACB$, получаем $OA \perp KL$, значит, OA – серединный перпендикуляр к хорде PQ, и поэтому $AP = AQ$. Отсюда TA – биссектриса угла PTQ (рис.105).

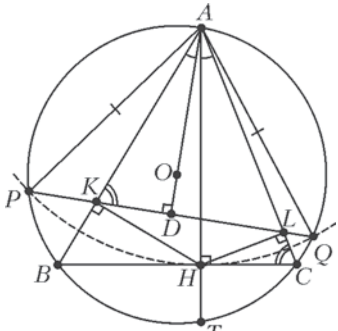


Рис. 105

Итак, центр I окружности, вписанной в PQT, лежит на TA. Кроме того, по лемме о трезубце $AI = AP$. Значит, для доказательства того, что $I = H$, достаточно показать, что $AH = AP$. Пусть D – точка пересечения AO и KL, а r – радиус Ω. По теореме Пифагора,

$$AQ^2 - r^2 = AQ^2 - OQ^2 =$$
$$= \left(AD^2 + DQ^2\right) - \left(OD^2 + DQ^2\right) = AD^2 - \left(AD - r\right)^2,$$

откуда $AQ^2 = 2r \cdot AD$. Далее, заметим, что AH – диаметр окружности, описанной около треугольника AKL, поскольку $\angle AKH = \angle ALH = 90°$; значит, коэффициент подобия треугольников AKL и ABC равен $AH/(2r)$. Отрезки AD и AH – соответственные высоты в этих треугольниках, поэтому $AD/AH = AH/(2r)$, или $AH^2 = 2r \cdot AD = AQ^2$, что и требовалось доказать.

Замечание. Доказательство того, что $AQ = AH$, можно упростить, рассмотрев инверсию с центром A и радиусом AQ. При этой инверсии прямая PQ и окружность Ω переходят друг в друга, поэтому точки B и K также переходят друг в друга. Следовательно, $AQ^2 = AB \cdot AK = AH^2$.

10 класс

1. При четных.

Если n четно, разобьем каждую грань куба на квадраты 2×2 и заклеим каждый квадрат двумя прямоугольниками так, чтобы к длинным сторонам прямоугольников, лежащих в одном квадрате, примыкали короткие стороны прямоугольников, лежащих в соседних квадратах. Покажем, почему так можно оклеить все грани. Легко понять, что можно оклеить четыре боковые грани, образующие кольцо. При этом на верхней грани один ряд квадратов 2×2 заполнить можно (в углах оклейка будет выглядеть так, как на рисунке 106 или симметрично); этот ряд определяет однозначно всю оклейку верхней грани; при этом остальные четыре крайних слоя квадратов будут заполнены аналогично, поэтому на остальных ребрах прямоугольники также будут стыковаться требуемым образом. Аналогично оклеивается нижняя грань.

Рис. 106

При нечетных n общее число прямоугольников равно $6n^2/2 = 3n^2$. Если у каждого пять соседей, то общее количество пар соседних прямоугольников будет равно $3n^2 \cdot 5/2$; однако это число нецелое. Значит, требуемая оклейка невозможна.

2. Для остроугольных.

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты треугольника ABC, H – его ортоцентр. Рассмотрим любую хорошую точку P; пусть AA_P, BB_P, CC_P – проходящие через нее чевианы. Из условия получаем, что $AA_P/AA_1 = BB_P/BB_1 = CC_P/CC_1$; значит, прямоугольные треугольники AA_1A_P, BB_1B_P и CC_1C_P подобны, поэтому $\angle A_1AA_P = \angle B_1BB_P = \angle C_1CC_P$. При этом возможны два различных случая ориентации этих углов. (Напомним, что *ориентированным углом* $\angle(l, m)$ называется угол, на который надо повернуть против часовой стрелки прямую l, чтобы она стала параллельна m.)

Случай 1. Пусть $\angle(A_1A, AA_P) = \angle(B_1B, BB_P) = \angle(C_1C, CC_P)$ (в частности, треугольник ABC остроугольный; действительно, если, скажем, $\angle BAC$ не острый, то углы $\angle B_1BB_P$ и $\angle C_1CC_P$ острые и ориентированы по-разному). Из первого равенства следует, что точки P, H, A, B лежат на одной окружности; аналогично, точка P лежит на окружностях, описанных около треугольников ACH и BCH. Но эти три окружности имеют ровно одну общую точку H; значит, P совпадает с H.

Случай 2. Два из трех ориентированных углов равны, а третий (для определенности, $\angle(C_1C, CC_P)$) им противоположен. Тогда, как и в первом случае, точка P лежит на окружности Ω_C, описанной около треугольника ABH (поскольку $\angle(AH, HB) = -\angle(AC, CB)$, эта окружность симметрична описанной окружности Ω треугольника ABC относительно прямой AB). Пусть прямая CH вторично пересекает Ω_C в точке X (тогда точки C и X симметричны относительно AB; на рисунках 107 и 108 показаны две таких потенциально возможных конфигура-

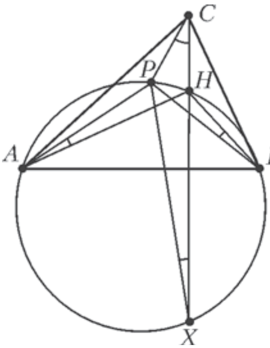


Рис. 107

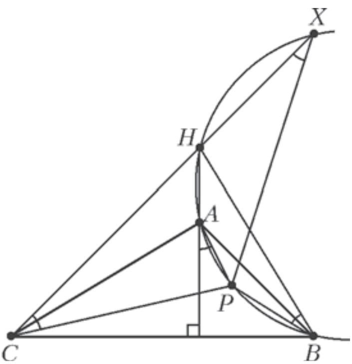


Рис. 108

ции). Тогда $\angle(PX, XC) = \angle(PB, BH) = -\angle(PC, CX)$; если эти углы ненулевые, то это означает, что треугольник PCX равнобедренный, $PC = PX$. Но тогда точка P лежит на серединном перпендикуляре AB к отрезку CX, что невозможно. Значит, $\angle(PB, BH) = 0$, и $P = H$.

Таким образом, хорошей точкой может быть только ортоцентр треугольника (и в остроугольном треугольнике он ею, очевидно, является). Следовательно, в остроугольном треугольнике хорошая точка одна, а в неостроугольном – ни одной.

Замечание. В случае 2 есть более короткое, но менее элементарное решение. Геометрическим местом точек P, удовлетворяющих одному равенству $\angle(B_1B, BB_P) = -\angle(C_1C, CC_P)$, является описанная около треугольника ABC равносторонняя гипербола. Две таких гиперболы могут иметь максимум четыре общих точки, и эти точки – A, B, C и H.

3. *Первое решение.* Пусть C_1 и C_2 – точки касания окружностей ω и ω_C, соответственно, вписанной и вневписанной в треугольник ABC, со стороной AB; пусть также C' − середина этой стороны. Тогда, как известно, $C_1C' = C_2C'$. Далее, при гомотетии с центром C, переводящей ω_C в ω, точка C_2 переходит в точку C_3 на ω, диаметрально противоположную C_1 (так как касательные к ω в этих точках параллельны; см. рис. 109). Значит, IC' − средняя линия треугольника $C_1C_2C_3$, поэтому $C'I \parallel CC_2$. Значит, при гомотетии с центром M и коэффициентом −2 точка I переходит в точку N, лежащую на CC_2 (аналогично, она лежит на отрезках, соединяющих другие вершины с соответствующими точками касания вневписанных окружностей; точка N называется *точкой Нагеля* треугольника ABC). Значит, N получается из M' гомотетией с центром I и коэффициентом 3.

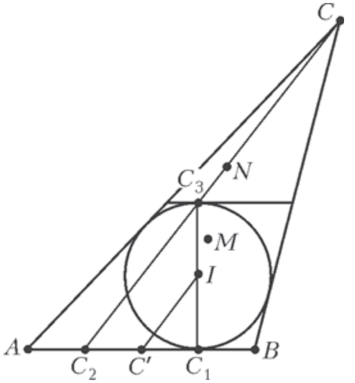


Рис. 109

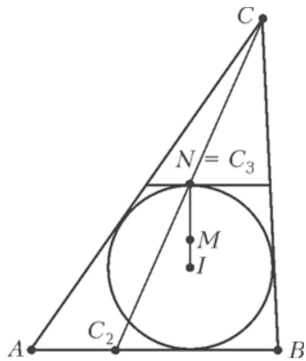


Рис. 110

Перейдем к решению задачи. Пусть $MI = r/3$. Тогда точка N лежит на ω. Пусть для определенности касательная к ω в этой точке пересекает стороны AC и BC; тогда ω и C лежат по разные стороны от этой касательной, а значит, $N = C_3$. Так как $IC_3 \perp AB$, то и $MI \perp AB$ (рис.110).

Обратно, пусть $AB \perp IM$. Тогда точка N лежит на прямой IC_2; кроме того, она лежит на CC_2. Поскольку треугольник ABC неравнобедренный, эти прямые различны, а значит, $N = C_2$, и $r = IN = 3IM$.

Второе решение. Пусть $AB \perp IM$. Тогда по теореме Пифагора

$$AM^2 - BM^2 = \left(AC_1^2 + C_1M^2\right) - \left(BC_1^2 + C_1M^2\right) =$$

$$= (p-a)^2 - (p-b)^2 = c(b-a)$$

(здесь C_1 − точка касания AB со вписанной окружностью). Пользуясь формулой длины медианы, получаем

$$AM^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right), \ BM^2 = \frac{1}{9}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right),$$

откуда

$$c(b-a) = \frac{1}{3}(b-a)(a+b), \text{ или } a + b = 3c, \text{ т.е. } p = 2c.$$

Легко показать, что верно и обратное: если $p = 2c$, то $AB \perp IM$. Наконец, поскольку $c(IM + r)/2 = S_{ABM} = S_{ABC}/3 = pr/3$, получаем $IM + r = 4r/3$, или $IM = r/3$.

Пусть, наоборот, $MI = r/3$. Заметим, что

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = \left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC}\right)^2 =$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{IM} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) + 3MI^2 =$$

$$= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3MI^2.$$

Значит, если $MI = r/3$, то

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + \frac{1}{3}r^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + r^2\right).$$

Далее, по теореме Пифагора $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$; наконец, по формуле Герона

$$r^2 = S^2/p^2 = (p-a)(p-b)(p-c)/p.$$

Итак,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + r^2}{3} = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + 3r^2,$$

или

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - (p-a)^2 - (p-b)^2 - (p-c)^2 =$$

$$= \frac{8r^2}{3} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{3p},$$

что приводится к виду $(p-2a)(p-2b)(p-2c)$. Как показано выше, одна из скобок обращается в нуль тогда и только тогда, когда IM перпендикулярно соответствующей стороне.

4. Все точки криволинейного восьмиугольника, ограниченного дугами восьми парабол с фокусами в вершинах квадрата и директрисами, содержащими несмежную сторону, кроме середин сторон квадрата (рис.111).

Заметим сразу, что середина гипотенузы лежит внутри квадрата. Если концы гипотенузы лежат на противоположных сторо-

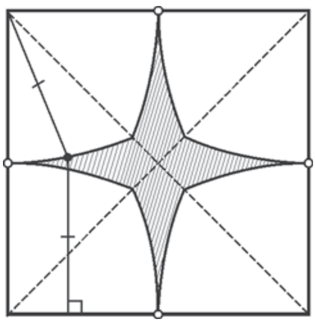


Рис. 111

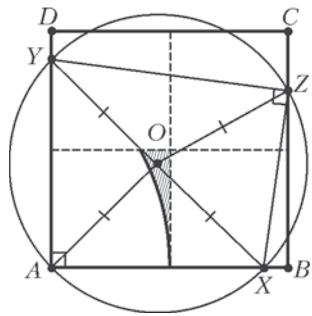


Рис. 112

нах квадрата, то ее середина лежит на соответствующей средней линии. Пусть теперь концы X и Y гипотенузы треугольника XYZ принадлежат соответственно сторонам AB и AD квадрата $ABCD$, а вершина Z – стороне BC (рис.112). Обозначим через O середину XY. Точки A и Z лежат на окружности с диаметром XY; поэтому $OA = OX = OY = OZ$, и расстояние от O до A меньше, чем до других вершин квадрата, но не меньше, чем расстояние от O до прямой BC.

Геометрическим местом точек, равноудаленных от A и BC, является парабола с фокусом A и директрисой BC (вершиной этой параболы является середина AB). Значит, точка O лежит между BC и этой параболой в четверти квадрата, содержащей A. При этом точка O может попасть на параболу, но не может – на среднюю линию (иначе точка Y совпадет с B).

Рассмотрев аналогично другие случаи расположения вершин треугольника и объединив полученные области, получим криволинейный восьмиугольник P, ограниченный дугами восьми парабол. Вершинами P являются середины сторон квадрата (они не лежат в ГМТ) и точки пересечения парабол с его диагоналями. При этом средние линии квадрата лежат в P; значит, и искомое ГМТ содержится в нем. Осталось показать, что любая точка O этого восьмиугольника, кроме середин сторон квадрата, принадлежит ГМТ.

Если O лежит на средней линии, параллельной AB, и расстояние от нее до AD не превосходит расстояния до BC, то можно в качестве концов гипотенузы X и Y взять проекции O на AB и CD, а в качестве вершины прямого угла – одну из точек пересечения окружности с диаметром XY и стороны AD. Если же точка O лежит в четверти квадрата, содержащей A, между параболой с фокусом A и директрисой BC и соответствующей средней линией, то в качестве X и Y возьмем вторые точки пересечения окружности с центром O и радиусом OA, а в качестве Z – точку пересечения этой окружности со стороной BC (такая точка существует, так как расстояние от O до BC не превосходит OA, а расстояния до точек B и C – превосходят).

5. Пусть X и Y – середины дуги α и дуги AB окружности ω соответственно, а O – центр ω. Тогда луночка с вершинами A и B находится между концентрическими окружностями с центром O и радиусами OY и OX (рис.113). Значит, диаметр окружности, вписанной в луночку, не превосходит XY; с другой стороны, окружность с диаметром XY касается ω и α и лежит в луночке. Итак, максимальный диаметр окружности, вписанной в эту луночку, равен XY.

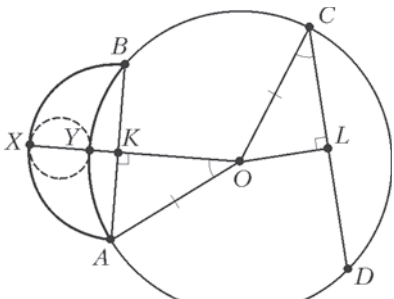


Рис. 113

Поскольку $AC \perp BD$, сумма дуг AB и CD окружности ω равна $180°$. Пусть K и L – середины отрезков AB и CD соответственно; тогда $\angle OK = 90° - \angle COL = \angle OCL$, поэтому прямоугольные треугольники AOK и OCL равны по гипотенузе и острому углу. Поэтому $OX = OK + KX = OK + KA =$ $= (AB + CD)/2$, поэтому $XY = (AB + CD)/2 - r$, где r – радиус ω. Аналогично, максимальный диаметр окружности, вписанной в луночку с вершинами C и D, также равен $(AB + CD)/2 - r$.

6. Поскольку $DA' \perp (XBC)$, получаем $\angle DA'C = 90°$; аналогично, $\angle DB'C = 90°$ (рис.114). Значит, точки A' и B' лежат на сфере с диаметром DC, поэтому расстояние между ними не превосходит диаметра: $A'B' \le DC$. Аналогично, $A'C' \le DB$ и $B'C' \le$ $\le DA$. Складывая эти три неравенства, получаем требуемое.

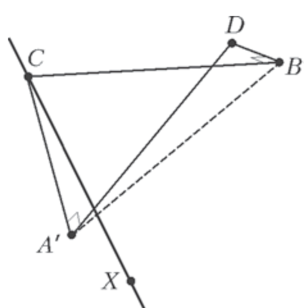


Рис. 114

7. Как известно, в произвольном треугольнике XYZ симедиана XX' (т.е. прямая, симметричная медиане из вершины X относительно угла X) проходит через точку пересечения касательных к описанной окружности в точках Y и Z. Значит, прямая DK является симедианой треуголь-

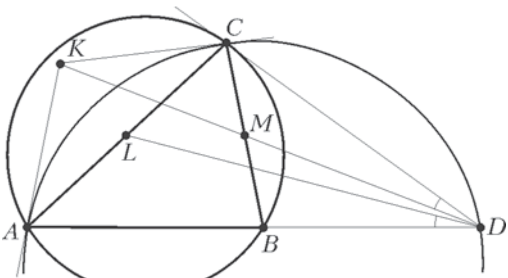


Рис. 115

ника ACD. Далее, треугольники ACD и CBD подобны. Значит, если DL и DM – их медианы, то $\angle CDK = \angle ADL = \angle CDM$, откуда и следует, что точка M лежит на DK (рис.115).

8. Ясно, что точки X и Y лежат на диагоналях BD и AC соответственно; поэтому прямые AC и BD содержат высоты треугольников AXB и CYD соответственно. Отметим на отрез-

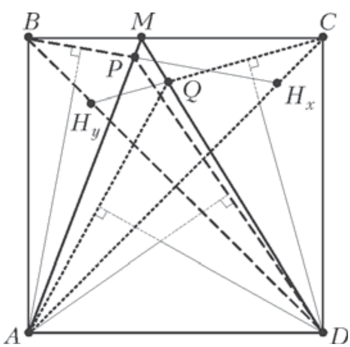


Рис. 116

ках AM и DM точки P и Q соответственно так, что $AP = DQ = AD$. Тогда AX – биссектриса и, следовательно, высота в равнобедренном треугольнике ABP; значит, ортоцентр H_x – это точка пересечения прямых BP и AC. Аналогично, H_y – это точка пересечения CQ и BD. Наконец, из тех же соображений получаем $AZ \perp DP$, $BZ \perp AQ$, так что H_z – точка пересечения прямых AQ и BP (рис.116).

Применим теорему Дезарга к треугольникам BPD и CAQ; поскольку прямые BC, PA и DQ, соединяющие их соответственные точки, пересекаются в точке M, получаем, что точки пересечения прямых, содержащих соответственные стороны этих треугольников, лежат на одной прямой. Как показано выше, эти точки и есть H_x, H_y и H_z.

IX ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. $45°$.

По теореме о внешнем угле $\angle AED = 90° + \angle B = 270° - 2\angle A$ (рис.117).

Следовательно,

$$\angle EAD = (180^\circ - \angle AED)/2 = \angle A - 45^\circ .$$

2. Возьмем на сторонах BC и AC точки A' и B' так, что $AB' = B'O = OA' = A'B$. Очевидно, что $A'B' \parallel AB$, т.е. $\angle CA'B' = \angle CBA = 80^\circ$. Кроме того, $\angle A'OB = \angle A'BO = \angle BCO = 10^\circ$. Значит, $\angle CA'O = 20^\circ$, а $\angle OA'B' = 60^\circ$, т.е. треугольник $OA'B'$ – равносторонний. Тогда $A'B' = A'B$ и $\angle A'BB' = \angle A'B'B = \angle ABB'$ (рис.118). Следовательно, точка B' совпадает с B_1. Аналогично, A' совпадает с A_1, что и требовалось доказать.

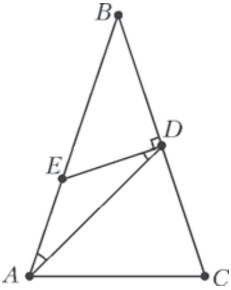


Рис. 117

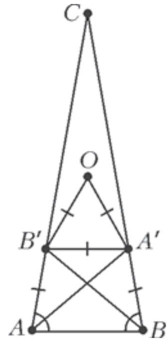


Рис. 118

3. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, D – четвертая вершина прямоугольника $ABCD$. Так как $AI \perp A_1A_2$, $CI \perp C_1C_2$, то перпендикуляры из A на CC_1 и из C на AA_1 пересекаются в центре J окружности, вписанной в треугольник ACD. Поэтому достаточно доказать, что $DI \perp A_1C_1$. Пусть X, Y, Z – проекции I на AB, BC, CD соответственно. Тогда $BC_1 = XC_2 = ZD$ и $A_1B = CY = IZ$, значит, треугольники A_1BC_1 и IZD равны, т.е. $\angle IDZ = \angle A_1C_1B$ (рис.119), откуда и следует искомая перпендикулярность.

4. Так как точки O, K лежат на серединном перпендикуляре к BC, то $OK \parallel AP$. Поэтому $\angle OPK = \angle POK = \angle OPA$. Значит, точка A', симметричная A относительно OP, лежит на прямой PK. При этом $OA' = OA$, т.е. A' лежит на описанной окруж-

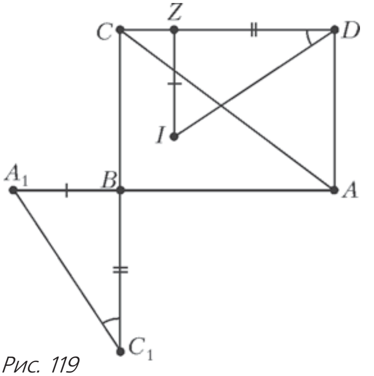


Рис. 119

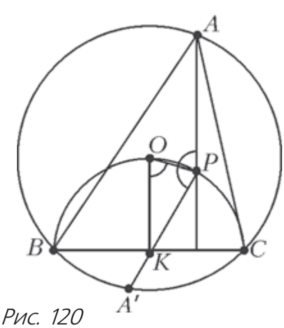


Рис. 120

ности треугольника ABC (рис.120) и, следовательно, совпадает с одной из точек E, F.

5. Да.

Пусть $ABCD$ и O – четырехугольник и точка из условия. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Так как $\Delta ABO = \Delta CBO$, то углы BAO и BCO равны как лежащие против BO. Аналогично $\angle DAO = \angle DCO$, откуда $\angle BAD = \angle BCD$. Точно так же равны и два других противоположных угла четырехугольника, поэтому сумма любых двух соседних углов равна π, т.е. $ABCD$ – параллелограмм.

При точке O найдутся два соседних угла, сумма которых не меньше π, скажем $\angle AOB$ и $\angle COB$. Второй из них равен одному из углов треугольника AOB. Это может быть только $\angle AOB$, так как его сумма с любым другим углом треугольника AOB меньше π. В равных треугольниках AOB и COB против равных углов лежат равные стороны, поэтому $AB = BC$ и, значит, $ABCD$ – ромб.

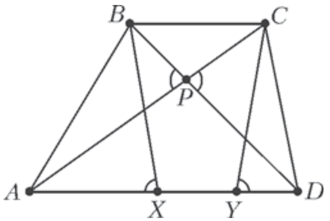


Рис. 121

6. Из условия следует, что $\angle BXA = \angle BPA = \angle CYD$ (рис. 121). Значит, трапеция $BXYC$ равнобокая, что равносильно утверждению задачи.

7. Прямые AI_a и CI_c пересекаются в центре I вписанной окружности треугольника ABC. При этом $AI_a/I_aI = AD/ID$, $CI_c/I_cI = CD/ID$. По теореме Менелая получаем, что $QA/QC = AD/CD = AB/BC$. Следовательно, BQ – внешняя биссектриса угла B, что и требовалось доказать.

8. Дуга окружности, проходящей через B, C и центр O описанной окружности треугольника ABC.

Пусть окружности касаются. Тогда углы, образованные их общей касательной с прямыми AC и AB, равны соответственно углам ALE и AKF, которые в свою очередь равны углам ABX и ACX. Поскольку сумма этих углов равна углу A треугольника, то $\angle BXC = 2\angle A = \angle BOC$. Аналогично получаем, что любая точка дуги удовлетворяет условию.

9. $90°$.

Пусть D – четвертая вершина параллелограмма $ACBD$, J – центр вписанной окружности треугольника ABD, S_1, S_2 – точки касания этой окружности с AD и BD. Тогда $S_1T_1 \parallel AC$, $S_2T_2 \parallel BC$ и $\angle T_1JT_2 = \angle S_1JS_2 = \pi - \angle C$. Кроме того, $DS_1 = DS_2$, а значит, прямые S_1T_1, S_2T_2 и DJ пересекаются в одной точке. Следовательно, J совпадает с точкой пересечения прямых S_1T_1 и S_2T_2, т.е. $\angle C = 90°$ (рис.122).

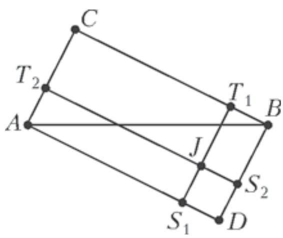


Рис. 122

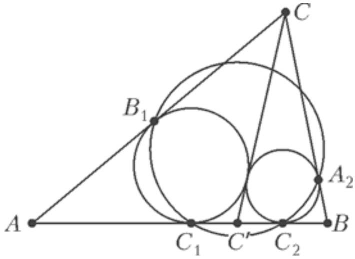


Рис. 123

10. Поскольку $AC' - BC' = AC - BC$, вписанные окружности треугольников ACC' и BCC' касаются стороны CC' в одной и той же точке. Поэтому $CB_1 = CA_2$. Кроме того, $AB_1 = AC_1$, $BA_2 = BC_2$, и, вычислив углы четырехугольника $A_2B_1C_1C_2$, получаем, что он вписанный. Следовательно, прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в радикальном центре трех окружностей: описанной окружности четырехугольника $A_2B_1C_1C_2$ и вписанных окружностей треугольников ACC', BCC' (рис.123).

11. а) Нет; б) нет.

а) Пусть для определенности $r_4 = r(ABC)$. Достаточно показать, что $r(ABC)/2 < \max\{r(ABD), r(CBD)\}$. Середина K диагонали AC лежит в одном из треугольников ABD, CBD, скажем, в треугольнике ABD. Тогда треугольник AKL, где L – середина AB, целиком содержится в треугольнике ABD, поэтому $r(ABC)/2 = r(AKL) < r(ABD)$.

б) Пусть $r = r_1$ – радиус окружности, вписанной в треугольник ABE. Так как диаметры окружностей, вписанных в треугольники BCE, ADE, меньше высот этих треугольников, совпадающих с высотами h_a, h_b треугольника ABE, достаточно доказать, что одна из этих высот не превосходит $4r$. Пусть $AE \geq BE$. Тогда полупериметр треугольника $p < AE + BE \leq \leq 2AE$ и $h_b = 2S/AE = 2pr/AE < 4r$.

Примечание. Отметим, что в обоих пунктах ответ изменится на положительный, если константу 2 заменить на меньшую

12. *Предварительные замечания.* Поскольку все основания высот и биссектрис по условию различны, треугольник неравнобедренный. На любой стороне треугольника основание высоты лежит ближе к меньшей из прилежащих сторон, чем основание биссектрисы, и поэтому достаточно определить, какая сторона треугольника наибольшая, наименьшая и средняя. Основания биссектрисы и высоты, проведенных из некоторой вершины X, будем обозначать L_X и H_X соответственно.

Лемма. *Если $AC > BC$, то прямые L_BL_A и H_BH_A пересекают продолжение стороны AB за вершину B.*

Доказательство леммы. Пусть L_BD – перпендикуляр из L_B на AB, а CH – высота. Поскольку биссектриса делит сторону пропорционально прилежащим, выполнено равенство $L_BD : CH = AB : (BC + AB)$. Аналогично, если L_AE – перпендикуляр из L_A на AB, то $L_AE : CH = AB : (AC + AB)$). Так как $AC > BC$, то $L_BD > L_AE$, поэтому L_BL_A пересекает AB за вершиной B, что и требовалось.

Точки H_B, H_A лежат на полуокружности с диаметром AB. Если бы углы H_AAB и H_BBA были равны, то перпендикуляры из H_A и H_B на AB также были бы равны. Но первый из углов меньше, поэтому и соответствующий перпендикуляр меньше. Лемма доказана.

а) Соединим отмеченные точки с противолежащими вершинами. Получим два семейства конкурентных прямых. На двух сторонах треугольника возьмем точки, принадлежащие одному и тому же семейству, и проведем через них прямую. Согласно лемме, она пересекает продолжение третьей стороны за меньшей из двух выбранных сторон – независимо от того, какому семейству соответствуют выбранные точки. Отсюда определяется, какая сторона треугольника меньше какой, что и требуется.

б) Для каждой вершины треугольника выберем на прилежащих сторонах ближайшие отмеченные точки и соединим их прямой. Как показано ниже, *эти прямые пересекут продолжение наибольшей стороны треугольника за вершину среднего угла и продолжения остальных двух сторон за вершину наибольшего угла*. Отсюда определяется, какая сторона треугольника меньше какой, что и требуется.

Докажем утверждение, выделенное курсивом. Пусть $AB > AC > BC$. Отмеченные точки, ближайшие (по сторонам) к вершине наименьшего угла, – основания биссектрис, а ближайшие к вершине наибольшего угла – основания высот. Согласно лемме, соединяющие их прямые пересекают соответственно продолжение BC за C и продолжение AB за B. Отмеченные точки, ближайшие по сторонам к вершине среднего угла B, – это H_C и L_A. Согласно лемме, прямая L_CL_A пересекает продолжение AC за C в некоторой точке P. Луч H_CL_A направлен внутрь треугольника H_CCP и потому пересекает CP, что и требуется.

13. Пусть $A'C_1 \perp BA$. Тогда по теореме Фалеса высота, проведенная из C, делит отрезок A_1C_1 в отношении $A_1C : CA' = (p-c):(p-a)$. Через ту же точку проходит и высота из A. Обратное утверждение доказывается аналогично.

14. Пусть X, Y – проекции N и M на BC. Тогда утверждение задачи равносильно равенству $RY = XQ$. Так как $\angle NQX = \angle NAB = \angle DBA$, треугольники XQN и ABD подобны (рис.124). Значит,

$$XQ = AB \cdot NX/AD.$$

Но

$$NX = CD\sin\angle BCD/2 =$$
$$= CD \cdot AD/2BC,$$

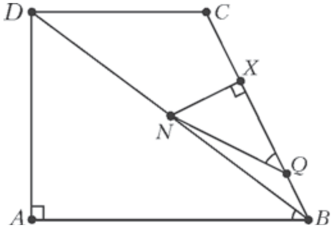


Рис. 124

следовательно,

$$XQ = AB \cdot CD/2BC = RY.$$

15. а) Опишем вокруг треугольника $A_2B_2C_2$ треугольник $A'B'C'$. А так, что $C_2A_2 \perp B'C'$, $A_2B_2 \perp C'A'$, $B_2C_2 \perp A'B'$. Очевидно, что соответствующие стороны треугольников ABC и $B'C'A'$ симметричны относительно центра описанной окружности треугольника $A_2B_2C_2$. При этой симметрии треугольник $A_2B_2C_2$ переходит в треугольник $B_1C_1A_1$. Следовательно, эти треугольники равны и имеют общий центр описанной окружности.

б) В описанной окружности треугольника ABC рассмотрим хорды AA', BB', CC', AA'', BB'', CC'', лежащие соответственно на прямых A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, A_2C_2, B_2A_2, C_2B_2. Из условия задачи следует равенство дуг AC', BA', CB', AB'', CA'', BC''. Пусть каждая из этих дуг равна φ. Тогда при повороте вокруг центра описанной окружности хорды AA', BB', CC' переходят соответственно в BB'', CC'', AA'', значит, этот поворот совмещает треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис.125).

Примечание. Как частный случай этой задачи получаем, что, если треугольник $A_1B_1C_1$ вырождается в точку, то треугольник $A_2B_2C_2$ также вырождается в точку, причем обе точки равноудалены от центра описанной окружности. Эти точки называются *точками Брокара* треугольника.

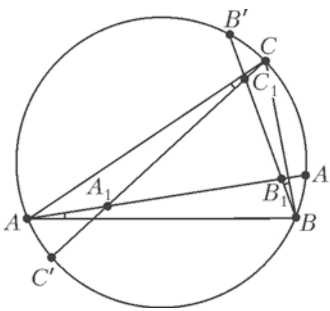


Рис. 125

16. При полярном преобразовании относительно вписанной окружности перпендикуляр из I на медиану перейдет в бесконечно удаленную точку этой медианы, прямая $A'B'$ – в точку C, а прямая, проходящая через C и параллельная AB, – в точку P пересечения $A'B'$ с IC'. Таким образом, надо доказать, что эта точка лежит на медиане.

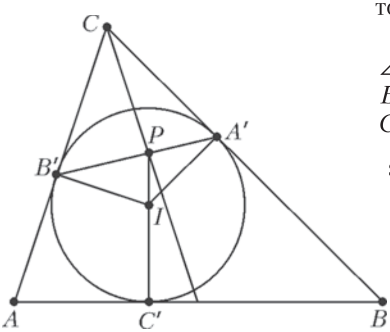


Рис. 126

Поскольку $IA' = IB'$, $\angle PIB' = \angle A$, $\angle PIA' = \angle B$, то $B'P : A'P = BC : AC$. А так как $CA' = CB'$, то

$$\sin\angle ACP : \sin\angle BCP = BC : AC,$$

т.е. CP делит AB пополам (рис.126).

17. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Обозначив $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$, $PD = d$, выразим стороны четырехугольника по теореме косинусов через a, b, c, d и $\cos\varphi$:

$$\left|AB^2 - BC^2 + CD^2 - CA^2\right| = 2\cos\varphi\left(ab + bc + cd + da\right) = 2AC\cdot BD\cos\varphi.$$

Но по теореме Птолемея $AC\cdot BD \le AB\cdot CD + BC\cdot AD$, причем равенство достигается только на вписанном четырехугольнике.

18. Пусть B', C', X', Y' – точки, симметричные B, C, X, Y относительно MN. Тогда $BB'CC'$ – равнобокая трапеция, диагонали которой пересекаются в точке L, инверсной A относительно окружности с диаметром MN. В этой же точке пересекаются диагонали равнобокой трапеции $XX'YY'$, вписанной в эту окружность. Боковые стороны этой трапеции пересекаются на поляре точки L, которая проходит через A и параллельна основаниям трапеции. В силу симметрии точка пересечения боковых сторон совпадает с A, что равносильно утверждению задачи (рис.127).

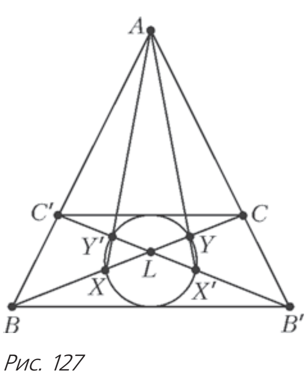


Рис. 127

19. а) Очевидно, что $PQ \parallel B_0C_0$. Кроме того, точка P лежит на описанной окружности треугольника

ACL. Значит, $\angle PLA = \angle C/2$ и $\angle PLB = 90° - \angle B/2 = \angle C_0A_0B$, где A_0 – точка касания вписанной окружности с BC. Следовательно, соответственные стороны треугольников PQL и $C_0B_0A_0$ параллельны, т.е. эти треугольники гомотетичны (рис.128). Центр гомотетии S лежит на прямой LA_0. Значит, прямые PC_0 и QB_0 пересекаются в S, т.е. на прямой BC.

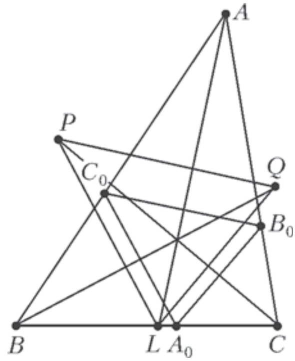


Рис. 128

б) Докажем сначала, что точки C_0, B_0, C_1 и B_1 лежат на одной прямой. Действительно, поскольку точка, симметричная B относительно биссектрисы угла C, лежит на прямой AC, точка C_1 лежит на средней линии $A'C'$. При этом $A'C_1 = BC/2$, а значит, $C'C_1 = |AC - BC|/2 = C'B_0$. Этим же свойством обладает и точка пересечения $A'C'$ с B_0C_0. Таким образом, прямые O_1O_2 и C_1B_1 параллельны. Далее, четырехугольник BC_1IA_0 – вписанный, поэтому $\angle C_1A_0B = 90° - \angle A/2 = \angle O_1LB$. Значит, $A_0C_1 \parallel LO_1$. Аналогично $A_0B_1 \parallel LO_2$ (рис.129). Следовательно, треугольники O_1O_2L и $C_1B_1A_0$ гомотетичны.

в) Каждая из гомотетий пп. а) и б) переводит A_0 в L, а прямую B_0C_0 – в серединный перпендикуляр к AL. Поэтому их центры совпадают.

20. Из условия следует, что четырехугольники ACA_1C_1 и BCB_1C_1 – вписанные. Поэтому $\angle B_1BC_1 = \angle ACC_1$, $\angle A_1AC_1 = \angle BCC_1$, а значит, $\angle AC_2B = \pi - \angle C$, т.е. C_2 лежит на

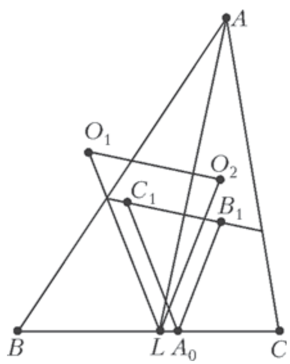


Рис. 129

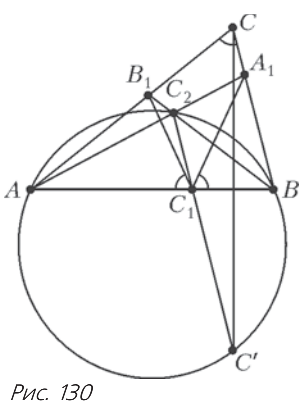


Рис. 130

окружности, проходящей через A, B и точку C', симметричную C относительно AB. При этом $\angle BC'C_1 = \angle BAC_2$, следовательно, прямая $C'C_1$ проходит через C_2 (рис.130).

21. Спроецируем сначала прямую AB на окружность из точки D, а затем окружность на прямую AB из точки T. В результате A перейдет в M, бесконечно удаленная точка – в A, а точки B и C останутся на месте. Приравняв двойные отношения, получим $MB/MC = (AB/AC)^2$. Из этого соотношения получаем, что $AM = AB \cdot AC/(AB + AC)$. Пусть теперь K – середина BC. Тогда $AN \cdot AK = 2AM(AB + AC)/2 = AB \cdot AC = AD \cdot AE$, т.е. точки D, E, K, N лежат на окружности.

22. Пусть K, L, M, N – точки на сторонах AB, BC, CD, DA пространственного четырехугольника $ABCD$, являющиеся основаниями общих перпендикуляров. При проекции на плоскость, параллельную KM и LN, эти прямые перейдут в перпендикулярные прямые $K'M'$ и $L'N'$. По теореме о трех перпендикулярах проекции прямых AB и CD будут перпендикулярны $K'M'$, а проекции прямых BC и AD перпендикулярны $L'N'$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ проецируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, причем $A'K' = D'M'$, $B'L' = A'N'$. Значит, $AK/KB = DM/MC$, $BL/LC = AN/ND$ и по теореме Менелая точки K, L, M, N лежат в одной плоскости.

23. а) 2013; б) 2012; в) 1.

а) *Оценка.* Симметрия либо меняет многогранники A и B местами, либо оставляет каждый из них на месте. В первом случае она меняет местами их центры тяжести, поэтому плоскость симметрии перпендикулярна отрезку между центрами тяжести и проходит через его середину. Во втором случае плоскость симметрии фигуры является плоскостью симметрии каждого из многогранников A и B. Отсюда оценка $1 + 2012 = 2013$. *Пример.* Пусть A – правильная 2012-угольная пирамида. На ее оси симметрии (очевидно, единственной) выберем точку вне A и проведем через нее плоскость P перпендикулярно оси. Пусть B получается из A отражением относительно P. Все условия задачи выполнены, при этом P и 2012 плоскостей симметрии пирамиды A являются плоскостями симметрии полученной фигуры.

б) *Оценка.* Поскольку многогранники A и B имеют разное количество плоскостей симметрии, они не равны и не могут перейти друг в друга при симметрии всей фигуры. Следовательно, эта симметрия оставляет каждый из них на месте и, в частности, является симметрией многогранника A, но он по условию имеет только 2012 плоскостей симметрии. *Пример.*

Пусть A, как и в п.а), – правильная 2012-угольная пирамида. Выберем на ее оси точку вне A, проведем через нее плоскость перпендикулярно оси и отразим основание пирамиды относительно этой плоскости. Над этим основанием построим прямую призму, не имеющую общих точек с A, это и будет B. Ясно, что B имеет 2013 плоскостей симметрии: одна из них параллельна плоскостям оснований призмы и расположена посредине между ними, а остальные 2012 проходят через ось призмы и две противоположные вершины основания. Они являются плоскостями симметрии также для A и для всей фигуры.

в) *Оценка*. Поскольку многогранники A и B имеют разное количество осей симметрии, они не равны и не могут перейти друг в друга при симметрии всей фигуры. Значит, эта симметрия оставляет каждый из них на месте. Поэтому она оставляет на месте центр тяжести каждого из многогранников. Эти центры не совпадают, поскольку многогранники выпуклые (это существенно!). Таким образом, у соединяющей прямой есть две неподвижные точки. Значит, она и есть ось симметрии. *Пример*. Пусть A – прямая призма, основания которой – правильные 2011-угольники. Плоскости оснований считаем горизонтальными. Тогда у призмы одна вертикальная ось симметрии, и через середину ее отрезка между основаниями проходят 2011 горизонтальных осей симметрии. Далее, пусть B – прямая призма, ее основания горизонтальны и являются правильными 2012-угольниками, а вертикальная ось та же, что у A, причем A и B не имеют общих точек. Тогда A имеет 2012 осей симметрии, B – 2013, а составленная из них фигура имеет вертикальную ось симметрии.

Финальный тур

8 класс

1. *Первое решение.* Из условия задачи следует, что равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и AED равны, т.е. треугольник ACD – также равнобедренный (рис. 131). Тогда $\angle BCD = 45° + \angle ACD = 45° + \angle ADC = \angle CDE$. Следовательно, равнобедренные треугольники BCD и CDE равны. Таким образом, $\angle CBD = \angle CDB = \angle ECD = \angle DEC$.

Из того, что треугольник CFD – равнобедренный, и из равенства отрезков BD и CE получим, что $BF = FE$.

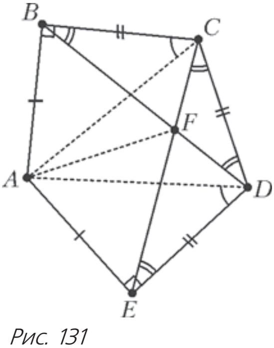


Рис. 131

Следовательно, $\Delta ABF = \Delta AEF$. Тогда

$$\angle AFB = \frac{\angle BFE}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle FCD}{2} =$$

$$= 90^\circ - \angle ECD = 90^\circ - \angle DBC = \angle ABF,$$

откуда $AB = AF$, что и требовалось.

Второе решение. Пусть BC пересекает DE в точке P. Заметим, что $\angle CBD = \angle CDB = \angle DBE$, т.е. BD – биссектриса $\angle CBE$. Значит, F – инцентр ΔPBE. Из симметрии и вписанности $PBAE$ получаем, что A – середина дуги BE описанной окружности ΔPBE, а значит по лемме о трезубце $AF = AB$, что и требовалось доказать.

Примечание. Задача верна с более слабым условием на равенство сторон. Достаточно потребовать $AB = AE$ и $BC = CD = DE$.

2. *Первое решение.* Не умаляя общности, предположим, что C лежит на отрезке AD. Пусть P – точка пересечения прямых O_1C и O_2D (рис.132). Треугольник AO_1C – равнобедренный,

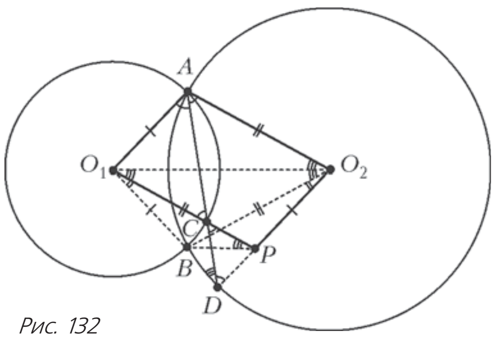


Рис. 132

поэтому $\angle O_1CA = \angle O_1AC = \angle CAO_2$, следовательно, $O_1C \parallel AO_2$. Аналогично получаем, что $O_1A \parallel O_2D$. Таким образом, O_1AO_2P – параллелограмм.

Докажем, что четырехугольник $BCPD$ – вписанный, а O_1O_2PB – равнобокая трапеция, из чего и будет следовать утверждение задачи. Действительно, тогда точка O (центр описанной окружности треугольника BCD) будет равноудалена от точек B и P, а, следовательно, равноудалена и от точек O_1 и O_2.

Заметим, что $O_1P = AO_2 = BO_2$ и $O_1B = O_1A = O_2P$, т.е. треугольники BO_1P и PO_2B равны. Следовательно, $\angle BO_1P =$

$= \angle PO_2B$, откуда O_1O_2PB – вписанный четырехугольник. Тогда $\angle O_1O_2B = \angle O_1PB$.

С другой стороны, $\angle BDA = \dfrac{1}{2}\angle AO_2B = \angle AO_2O_1 = \angle O_1O_2B$ и $\angle O_2O_1P = \angle AO_2O_1$. Следовательно, $\angle BDA = \angle O_1PB = \angle O_2O_1P$, т.е. $BCPD$ – вписанный и $O_1O_2 \parallel BP$. Поскольку $O_1B = O_2P$, то O_1O_2PB – равнобокая трапеция.

Второе решение. Так как $OO_1 \perp BC$, $O_1O_2 \perp AB$, то $\angle OO_1O_2 = \angle ABC = \dfrac{\angle AO_1C}{2}$. Аналогично $\angle OO_2O_1 = \dfrac{\angle AO_2D}{2}$. Но, как показано в предыдущем решении, $\angle AO_1C = \angle AO_2D$.

3. Нет.

Пусть AB – наибольшая сторона многоугольника. Спроецируем все вершины, отличные от A и B, на AB. Если ни одна из проекций не попадает на отрезок AB, то проекция некоторой стороны s, отличной от AB, строго содержит AB, следовательно, $s > AB$ – противоречие.

4. Пусть O – центр описанной окружности треугольника LAB. Тогда прямые OO_1 и O_2O_3 перпендикулярны BD, а прямые O_1O_2 и O_3O перпендикулярны AC. Следовательно, мы можем восстановить серединные перпендикуляры OO_1 и OO_3 к сторонам LB, LA треугольника LAB. Прямые h_a, h_b, проходящие через ортоцентр H этого треугольника и параллельные OO_1 и OO_3, являются высотами этого треугольника, т.е. проходят через точки A и B соответственно (рис.133). Поэтому прямые, симметричные h_a, h_b относительно соответственно OO_3, OO_1, пересекаются в точке L. Дальнейшее построение очевидно.

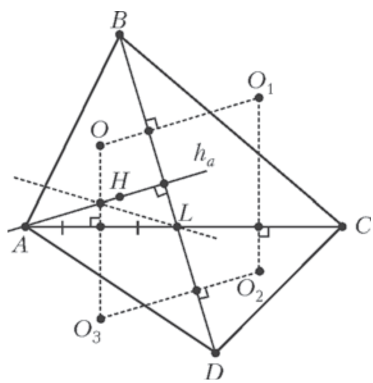


Рис. 133

5. Так как точка K лежит на биссектрисе угла C, расстояние от нее до прямой AC равно расстоянию до BC, т.е. KA'. Поскольку $KA' = KB'$, отсюда следует, что $KB' \perp AC$. Значит, медиана BB' является также высотой и $AB = BC$. Тогда BK и CK – биссектрисы треугольника, следовательно, AK – тоже биссектриса, а поскольку AK – высота, то $AB = AC$. Таким образом, треугольник ABC – равносторонний и $A'K = B'K = C'K$.

6. Докажем, что четырехугольник $CDEF$ – вписанный

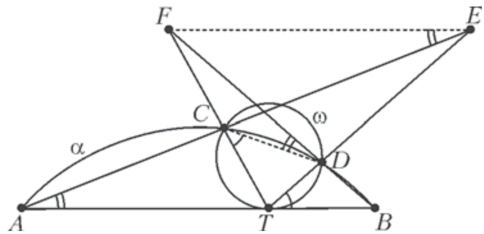


Рис. 134

(рис.134), из чего будет следовать утверждение задачи. Действительно, тогда $\angle FEC = \angle FDC$ и $\angle FDC = 180° - \angle BDC = \angle CAB$, т.е. $FE \parallel AB$.

Поскольку AB – касательная к окружности ω, то $\angle TCD = \angle BTD$. Кроме того,

$$\angle FCE = \angle ACT = \angle ACD - \angle TCD =$$

$$= (180° - \angle ABD) - \angle BTD = \angle TDB = \angle FDE.$$

Следовательно, $CDEF$ – вписанный четырехугольник, что и требовалось.

7. Пусть O_0 и R_0 – соответственно центр и радиус объемлющей окружности, O_1, O_2, O_3 и R_1, R_2, R_3 – центры и радиусы остальных. Тогда $O_0O_i = R_0 - R_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, $O_iO_j = R_i + R_j$ $(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$. Отсюда $O_0O_1 - O_2O_3 = O_0O_2 - O_3O_1 = O_0O_3 - O_1O_2 = R_0 - R_1 - R_2 - R_3 = d$. Если d >(<) 0, то расстояние от O_0 до любой из точек O_1, O_2, O_3 больше (меньше), чем расстояние между остальными двумя точками. Это определяет O_0 однозначно, вопреки условию. Действительно, если в каждой из пар (O_0O_1, O_2O_3), (O_0O_2, O_1O_3), и (O_0O_3, O_1O_2) раскрасить длинный отрезок в красный цвет, а короткий – в синий, то O_0 – единственная точка, в которой сходятся три отрезка одного цвета. Если же $d = 0$, то в несамопересекающемся четырехугольнике, образованном данными точками, противоположные стороны равны и диагонали равны. Значит, это прямоугольник.

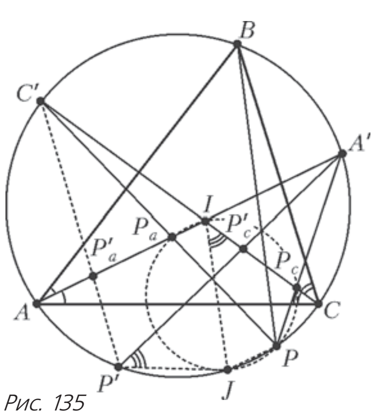


Рис. 135

8. Прежде всего заметим, что прямые PP_a, PP_c вторично пересекают описанную окружность треугольника в серединах C', A' дуг AB, BC (рис.135). Поэтому

$$\angle P_a P P_c = (\angle A + \angle C)/2 = 180° - \angle AIC,$$

где I – центр вписанной окружности треугольника. Значит, окружность PP_aP_c всегда проходит через точку I. Зафиксируем теперь какое-нибудь положение точки P и найдем вторую точку J пересечения окружностей PP_aP_c и ABC. Для любой другой точки P' имеем

$$\angle JP'P'_c = \angle JP'A' = 180° - \angle JPA' = 180° - \angle JPP_c = \angle JIP_c = \angle JIP'_c$$

(если P и P' расположены, как на рисунке 135, в других случаях рассуждения аналогичны), т.е. окружность $P'P'_aP'_c$ также проходит через J. Следовательно, центры всех окружностей PP_aP_c лежат на серединном перпендикуляре к отрезку IJ.

Примечание. Рассмотрим «полувписанную окружность» ω (касающуюся отрезков BA, BC и дуги APC).

В частном случае, когда P – точка касания окружностей ω и (ABC), видим, что J совпадает с P. Отсюда получаем описание точки J как точки касания с полувписанной окружностью. Как известно (см., например, параграф «Полувписанная окружность» книги «Математика в задачах»), J также лежит на прямой IS, где S – середина дуги ABC.

9 класс

1. Отметим вне окружности на луче B_1B точку M, а на луче D_1D точку N (рис.136). По теореме об угле между касательной и хордой равны углы MBE_1 и BCE_1, а также NDA_1 и DCA_1. Используя равенство вертикальных углов, получим, что

$$\angle ABB_1 = \angle MBE_1 = \angle BCE_1 =$$
$$= \angle DCA_1 = \angle NDA_1 = \angle EDD_1.$$

Следовательно, дуги AD_1 и EB_1 равны, откуда и следует утверждение задачи.

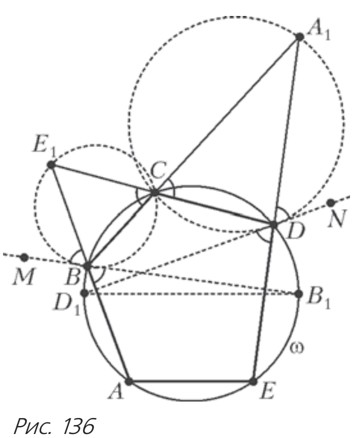


Рис. 136

2. Точки C и D равноудалены от прямой AB. Следовательно, прямая AB проходит через середину M отрезка CD (рис.137). Пусть прямая CD вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. По теореме о се-

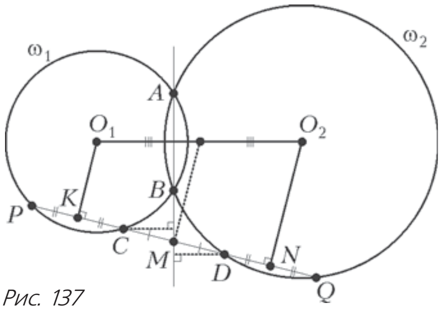


Рис. 137

кущих к окружности $MC \cdot MP = MB \cdot MA = MD \cdot MQ$. Учитывая, что $MC = MD$, получим, что $MP = MQ$ и $PC = DQ$. Пусть K и N – середины отрезков PC и DQ соответственно. Тогда M – середина KN. Средняя линия прямоугольной трапеции O_1KNO_2 является серединным перпендикуляром к отрезку CD. Следовательно, точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2.

3. Достаточно доказать, что одно из отношений $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$ не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 2. Действительно, если, скажем, отношение $\frac{AO}{OC}$ такое, то $S_{AOB} \le 2S_{BOC}$ и $S_{COD} \le 2S_{AOD}$, откуда и следует требуемое. Докажем теперь этот факт.

Без ограничения общности можно считать, что $AO \le OC$, $BO \le OD$. Предположим противное: пусть $AO < \frac{OC}{2}$, $BO < \frac{OD}{2}$. Отложим на отрезках OC, OD соответственно отрезки $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$ (рис.138). Тогда $A'B' = 2AB \ge 2$, и точки A', B' лежат на сторонах треугольника COD (не совпадая с вершинами). Значит, отрезок $A'B'$ меньше одной из сторон этого треугольника. Оценим стороны треугольника COD.

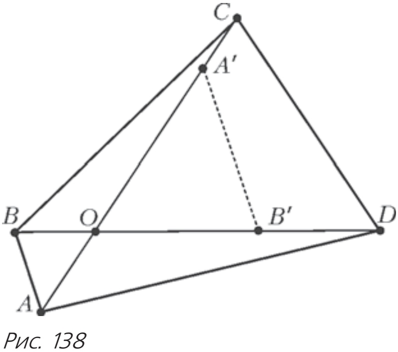


Рис. 138

По условию $CD \le 2$. Поскольку точка O лежит между B и D, то отрезок CO не больше одной из сторон CB и CD, следовательно, $CO \le 2$ и, аналогично,

$DO \le 2$. Отрезок $A'B'$ должен быть меньше одной из этих сторон, но $A'B' \ge 2$. Получили противоречие.

Примечание. Равенство достигается, например, на следующем (вырожденном) четырехугольнике. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $1 \le AB$, $BC \le 2$ и $AC = 3$, и выберем точку D на отрезке AC так, что $CD = 1$, $DA = 2$.

Из решения нетрудно видеть, что для невырожденных четырехугольников неравенство строгое.

4. *Первое решение.* Будем рисовать данную конфигурацию с конца (рис.139). Возьмем правильный шестиугольник $A_1B'C_1A'B_1C'$ и такую точку M внутри треугольника $A_1B_1C_1$, что $\angle B_1MC_1 = 180 - \alpha$, $\angle C_1MA_1 = 180 - \beta$, и т.д. (эта точка лежит внутри $\Delta A_1B_1C_1$, потому что F лежит внутри ΔABC). Пусть прямые, проходящие через A', B' и C' и перпендикулярные A_1M, B_1M и C_1M, образуют ΔABC. Очевидно, что он подобен данному треугольнику. Значит, осталось показать, что AA_1, BB_1 и CC_1 являются его медианами, а M – точкой Торричелли (т.е. $M \equiv F$).

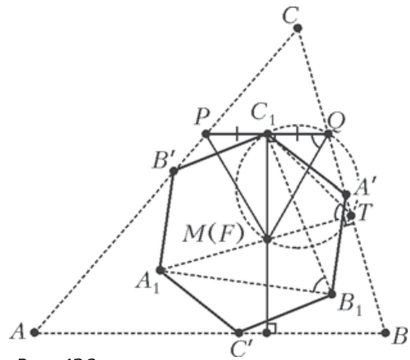


Рис. 139

Пусть прямая, проходящая через C_1 и параллельная AB, пересекает CA и CB в точках P и Q соответственно. Построим точку $T = A_1M \cap CA'B$. Так как $\angle A_1TA' = 90$, T лежит на описанной окружности шестиугольника $A_1B'C_1A'B_1C'$ и четырехугольник MC_1QT вписанный. Следовательно,

$$\angle C_1QM = \angle C_1TM = \angle C_1TA_1 = \angle C_1B_1A_1 = 60^\circ .$$

Аналогично, $\angle QPM = 60^\circ$, т.е. треугольник MPQ равносторонний, а C_1 – середина PQ. Рассмотрев гомотетию с центром C, получаем, что CC_1 – медиана, а CM проходит через третью вершину равностороннего треугольник с основанием AB и, значит, через точку Торричелли.

Второе решение. Пусть A_p – первая точка Аполлония. Известно, что ее педальный треугольник $A_0B_0C_0$ правильный. Точки Аполлония и Торричелли изогонально сопряжены. Следовательно, их педальные треугольники имеют общую описанную окружность ω.

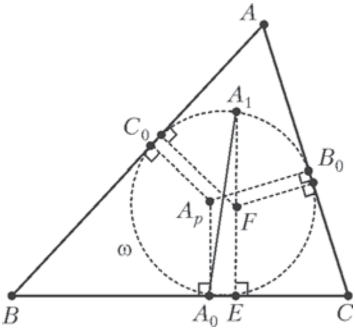


Рис. 140

Определим точку A_1 (рис.140). Пусть E – проекция F на BC, тогда E лежит на ω. Прямая EF пересекает ω вторично в точке A_1. Угол $A_0EA_1 = 90°$. Следовательно, A_0A_1 – диаметр. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$ центрально симметричны относительно центра окружности ω. Следовательно, шестиугольник $A_1B_0C_1A_0B_1C_0$ правильный. Осталось доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на соответствующих медианах. Это можно сделать как в первом решении.

(О свойствах педальных (подерных) треугольников см., например, в книге: *В.В.Прасолов* «Задачи по планиметрии», §10. Подерный треугольник.)

5. Проведем через F и E прямые, параллельные AK и пересекающие BC в точках P и Q (рис.141). По теореме Фалеса $PM = MQ$, значит, $CP = BQ$ и

$$\frac{BK}{CK} = \frac{CP}{CK} \cdot \frac{BK}{BQ} = \frac{CF}{FA} \cdot \frac{BA}{BE}.$$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику AFE и прямой CB, получим

$$\frac{CF}{FA} \cdot \frac{BA}{BE} \cdot \frac{ES}{FS} = 1,$$

что и требовалось доказать.

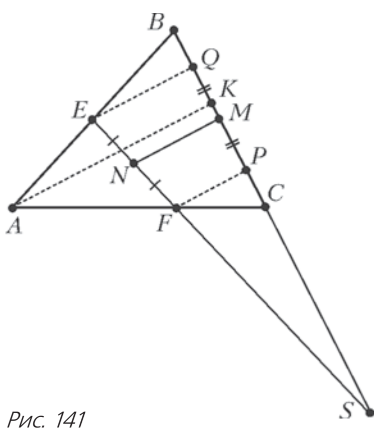


Рис. 141

6. Так как $\angle BAI_c = \angle BCI_a = 60°$, точки, симметричные I_c, I_a относительно BA, BC соответственно, лежат на прямой AC (рис. 142). С другой стороны, $\angle ABI_c + \angle CBI_a = 60° = \angle ABC$, следовательно, прямые, симметричные BI_c, BI_a относительно AB, BC, пересекают AC в одной и той же точке J. Значит, A_1C_1 – средняя линия треугольника JI_aI_c. Тогда высоты треугольника A_1BC_1 из вершин A_1, C_1, параллельные радиусам I_cC_1, I_aA_1 соответственно, тоже являются средними линиями этого треугольника и пересекаются в середине отрезка I_aI_c.

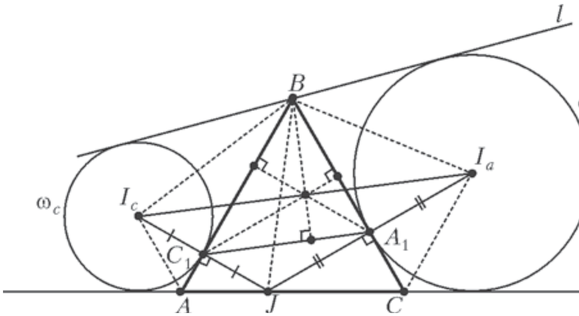


Рис. 142

7. *Первое решение.* Пусть K – вторая точка пересечения ω_1 и ω_2. Для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что $\angle OKX = 90^\circ$.

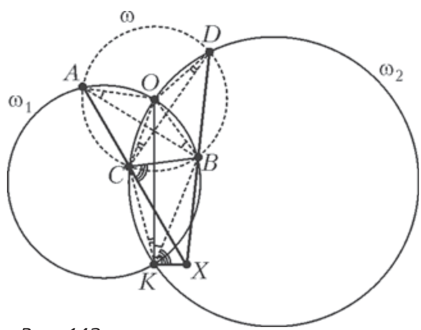


Рис. 143

По условию задачи $OA = OB = OC = OD$. Следовательно, треугольники AOB и COD равнобедренные (рис.143). Пусть α и β – углы при их основаниях соответственно. Тогда, по свойству вписанных углов, имеем

$$\angle BKC = \angle BKO + \angle CKO = \angle BAO + \angle CDO = \alpha + \beta .$$

Учитывая, что четырехугольник $ACBD$ вписанный, получим цепочку равенств

$$\angle BXC = 180^\circ - \angle XBC - \angle XCB =$$

$$= 180^\circ - \angle CAD - \angle ADB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\cup AB + \cup CD),$$

где AB и CD – дуги окружности с центром O, $\cup AB = 180^\circ - 2\alpha$, $\cup CD = 180^\circ - 2\beta$. Следовательно, $\angle BXC = \angle BKC$, т.е. четырехугольник $BXKC$ вписанный. Значит,

$$\angle XKB = 180^\circ - \angle XCB = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ + \alpha .$$

Таким образом, $\angle OKX = \angle BKX - \angle BKO = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть OP и OQ – диаметры ω_1 и ω_2 (рис.144). Докажем, что все такие точки X лежат на прямой PQ.

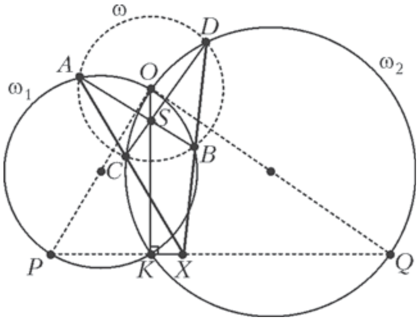


Рис. 144

Рассмотрим инверсию относительно окружности ω. Тогда ω_1 перейдет в AB, а ω_2 – в CD, следовательно, точка K перейдет в точку S пересечения AB и CD. Кроме того, $PQ \perp OS$, т.е. PQ – поляра точки S относительно окружности ω. С другой стороны, X (как точка пересечения AC и BD) также лежит на поляре точки S. Следовательно, X принадлежит PQ.

Определение и свойства поляры см., например, в книге: *Я.П.Понарин*, «Элементарная геометрия», том 1, §18.

8. Нет.

Очевидно, что вопрос задачи можно переформулировать следующим образом: верно ли, что найдется момент, когда все три отрезка между велосипедистами видны из центра под углами, большими $60°$? Ответ на этот вопрос не изменится, если изменить скорости всех велосипедистов на одну и ту же величину. Поэтому можно считать, что первый велосипедист стоит на месте в некоторой точке A.

Впишем в данную окружность правильный шестиугольник $ABCDEF$ и обозначим через M и N середины дуг BC и EF соответственно (рис.145). Пусть второй и третий велосипедисты стартуют из точки M с равными скоростями в противоположных направлениях: второй – к точке B, третий – к точке C. Пока они не достигли этих точек, расстояние между ними меньше 1 км. Затем второй велосипедист будет удален от первого, т.е. от точки A, меньше чем на 1 км, пока не приедет в точку F. Одновременно третий приедет в точку E, и расстояние между вторым и третьим станет равно 1 км. Затем оно уменьшается, пока велосипедисты не встретятся в точке N. Получили расположение, симметричное первоначальному относительно прямой

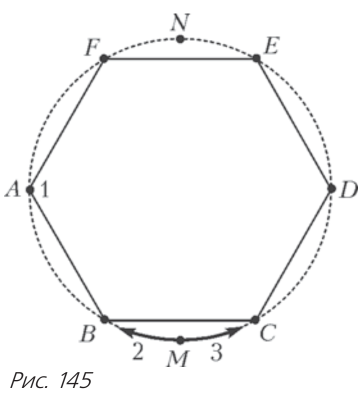


Рис. 145

AD, с переменой местами второго и третьего велосипедистов. Далее процесс повторяется.

Примечание. Можно показать, что построенный пример – единственный с точностью до прибавления ко всем скоростям одной и той же величины. Он соответствует случаю, когда скорости образуют арифметическую прогрессию. Во всех остальных случаях обязательно найдется момент времени, когда расстояния между велосипедистами не только больше 1 км, но даже больше $\sqrt{2}$ км! Это следует из теоремы, доказательство которой мы оставляем читателю:

Теорема. *Если в условии задачи 8 скорости велосипедистов не составляют арифметическую прогрессию, то найдется момент времени, когда три радиуса, проведенные к велосипедистам, образуют тупые углы.*

Пользуясь этим фактом, античные астрономы могли бы строго обосновать невозможность геоцентрической системы мира. Причем для этого достаточно было бы рассмотреть движения только трех небесных тел: Солнца, Венеры и Меркурия.

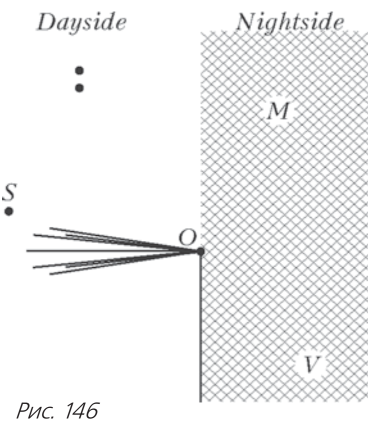


Рис. 146

Обозначим их точками S, V, M соответственно (рис.146). Предположим, что они вращаются вокруг Земли (точки O) по круговым орбитам. Считаем, что они вращаются в одной плоскости (в реальности плоскости их орбит почти совпадают). Их угловые скорости различны и не составляют арифметическую прогрессию (это известно). Тогда в некоторый момент времени все три угла между лучами OS, OM и OV тупые. Предположим, наблюдатель находится на поверхности Земли в точке, противоположной направлению луча OS. Он находится на неосвещенной стороне Земли, т.е. ночью, и видит Меркурий и Венеру, поскольку углы SOM и SOV – тупые. Угловое расстояние между двумя этими планетами, угол MOV, больше $90°$. Однако, по данным многолетних наблюдений, которыми располагали античные астрономы, угловое расстояние между Меркурием и Венерой никогда не превосходит $76°$. Полученное противоречие доказывает невозможность геоцентрической системы с круговыми орбитами.

10 класс

1. Поскольку

$$\angle A_1AP = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle AQP,$$

луч AA_1 проходит через центр O описанной окружности треугольника APQ (рис.147). Этот центр также лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку PQ. Поскольку $AB \neq AC$, прямые AO и l не параллельны. Но и O, и A_1 являются их общими точками; значит, $A_1 = O$. Следовательно, вписанный угол PAQ равен половине центрального угла PA_1Q.

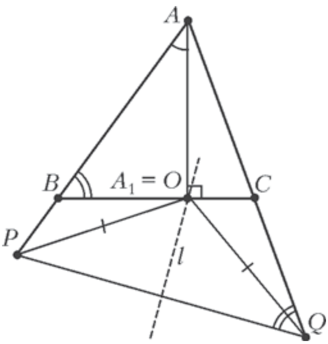


Рис. 147

2. Предположим, что $\angle ALB \geq 90^\circ$. Тогда $AB^2 \geq$ $\geq AL^2 + BL^2$ и $CD^2 \geq CL^2 + DL^2$; отсюда же получаем $AD^2 \leq$ $\leq AL^2 + DL^2$ и $BC^2 \leq BL^2 + CL^2$. Значит, $2AB^2 = AB^2 + CD^2 \geq AD^2 + BC^2$. С другой стороны, из описанности имеем $2AB = AB + CD = BC + AD$. Значит, $AD \neq BC$, и

$$2\left(AD^2 + BC^2\right) = (AD + BC)^2 + (AD - BC)^2 > (2AB)^2 = 4AB^2.$$

Противоречие.

3. *Первый способ*. Пусть $ABCX'$ – тетраэдр, в котором

$$AB \cdot CX' = BC \cdot AX' = CA \cdot BX'. \qquad (*)$$

Обозначим через I'_a, I'_b и I'_c центры вписанных окружностей треугольников BCX', ACX' и ABX'. Из $(*)$ следует, что биссектрисы AI'_b и BI'_a углов $X'AC$ и $X'BC$ пересекают отрезок $X'C$ в одной точке. Значит, отрезки AI'_a и BI'_b пересекаются. Аналогично, каждый из них пересекается с отрезком CI'_c. Поскольку эти три отрезка некомпланарны, они пересекаются в одной общей точке.

Устремив X' к X вдоль окружности, по которой пересекаются три сферы Аполлония для пар точек (A, B), (B, C), (A, C), получим утверждение задачи.

Второй способ. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, а A_1, B_1 и C_1 – основания соответствующих биссектрис в этом треугольнике. Пусть прямая CI_3 пересекает XI в точке T_c; точки T_a и T_b определим аналогично. Мы собираемся доказать, что $T_a = T_b = T_c$. Поскольку $\dfrac{XB}{XA} = \dfrac{BC}{AC}$, биссектриса XI_3 угла BXA проходит через C_1. Применяя теорему Менелая к ΔXIC_1 и используя свойство биссектрисы AI_3 угла XAC_1 имеем

$$\frac{XT_c}{T_cI} = \frac{XI_3}{I_3C_1} \cdot \frac{C_1C}{CI} = \frac{XA}{AC_1} \cdot \frac{C_1C}{CI} = \frac{XA}{CI} \cdot \frac{C_1C}{AC_1} = \frac{XA}{CI} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin(\angle C/2)}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{XT_b}{T_bI} = \frac{XA}{BI} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin(\angle B/2)}.$$

Но $\dfrac{BI}{CI} = \dfrac{\sin(\angle C/2)}{\sin(\angle B/2)}$, откуда $\dfrac{XT_c}{T_cI} = \dfrac{XT_b}{T_bI}$, что и требовалось.

4. Разобьем решение для удобства на 4 этапа.

1. Будем называть *элементарным* треугольник с площадью $\dfrac{1}{2}$ и целыми квадратами сторон. Элементарный треугольник со сторонами 1, 1, и $\sqrt{2}$ обозначим через Δ.

Назовем *переклейкой* операцию разрезания ΔABC по медиане AM и склеивания получившихся треугольников ABM и ACM по равным отрезкам BM и CM в новый треугольник со сторонами AB, AC и $2AM$.

2. Покажем, что из любого элементарного треугольника δ можно переклейками получить Δ.

Прежде всего заметим, что переклейка переводит элементарный треугольник в элементарный: площадь не меняется, а из формулы медианы $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a$ следует, что целочисленность квадратов сторон тоже сохраняется.

Будем теперь переклеивать произвольный элементарный треугольник δ следующим образом: если у δ есть тупой угол, то будем разрезать его по медиане из этого угла. Тогда наибольшая сторона треугольника будет уменьшаться, и так как квадраты сторон целые, то когда-нибудь мы получим элементарный треугольник δ', являющийся прямоугольным или остроугольным. В этом случае синус наибольшего угла не меньше $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому произведение сторон, прилегающих к нему, не больше $\dfrac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$; значит, они обе единичные, а тогда угол между ними – прямой. Таким образом, мы получили Δ.

3. Если δ' получен переклейками из δ, то и δ можно

получить переклейками из δ'. Следовательно, любой элементарный треугольник δ может быть получен переклейками из Δ.

4. Будем называть треугольник δ *оберткой*, если квадрат со стороной $\frac{1}{2}$ можно завернуть в δ так, чтобы любые две точки, лежащие на одной стороне δ и равноудаленные от середины этой стороны, совместились.

Из треугольника Δ можно получить обертку, перегнув его по средним линиям, параллельным катетам.

Предположим, что треугольник $\delta = ABC$ является оберткой, и пусть AM – одна из его медиан. Рассмотрим способ заворачивания в нее квадрата, склеим в нем все пары точек стороны BC, равноудаленные от M, и разрежем ее вдоль AM. В результате получим, что переклейка ΔABC по медиане AM также является оберткой. Отсюда, вкупе с пунктом 3, следует утверждение задачи.

Замечание 1. Как нетрудно видеть из решения, следующие условия эквивалентны:

а) ΔABC элементарный;

б) существует треугольник, равный ΔABC, с целыми координатами вершин;

в) существуют такие шесть целых чисел p, q, r, s, t, u, что $p + q + r = s + t + u = 0$ и $p^2 + s^2 = AB$, $q^2 + t^2 = BC$, $r^2 + u^2 = CA$.

Замечание 2. Равносильность условий б) и в) очевидна. То, что условие а) также им равносильно, можно показать и по-другому. Можно воспользоваться методами теории чисел, стартовав с формулы Герона: согласно ей, для элементарного треугольника со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ верно равенство

$$2(ab + bc + ca) - \left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 1.$$

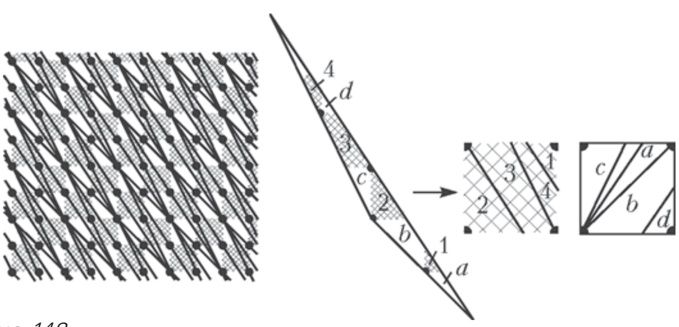


Рис. 148

Можно показать – например, методом спуска – что все ее решения удовлетворяют в).

Другой метод состоит в следующем. Рассмотрим наш треугольник ABC и породим им решетку (т.е. отложим от точки A всевозможные векторы вида $k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ с целыми k и l; см. рис.148). Используя формулу косинусов, нетрудно понять, что расстояния между любыми точками этой решетки – корни из целых чисел. Из условия на площадь теперь следует, что минимальная площадь параллелограмма с вершинами в точках решетки равна 1; теперь, рассмотрев такой параллелограмм наименьшего диаметра, нетрудно убедиться, что он – единичный квадрат[1].

Эта же решетка помогает после этого получить другое решение задачи. Для удобства совершим гомотетию с коэффициентом 2; тогда наш треугольник имеет четные координаты вершин и площадь 2, и надо завернуть в него единичный квадрат. Раскрасим теперь клетчатую плоскость шахматным образом и расположим на ней решетку из наших треугольников; вершинами треугольников будут все точки с четными координатами. Заметим, что все треугольники разбиения разбиты на два класса: получающиеся из исходного параллельным переносом, и получающиеся из него центральной симметрией.

Будем теперь оборачивать (черный) квадрат с вершиной в одной из вершин нашего треугольника этим треугольником, сгибая его по сторонам квадрата. На черную сторону попадут все части треугольника из черных частей плоскости; при этом части из строк с четными номерами претерпят параллельный перенос, а с нечетными – центральную симметрию.

С другой стороны, все черные квадраты в строках с четными номерами разбиты одинаково, а разбиение остальных черных квадратов получается из предыдущего центральной симметрией. Такая симметрия меняет местами два класса треугольников разбиения. Теперь нетрудно понять, что наш черный квадрат окажется замощен полностью: те его части, которые попадают в треугольники первого класса, будут накрыты параллельными переносами частей исходного треугольника, остальные – симметриями остальных его частей. То же произойдет и с обратной стороной нашего квадрата.

5. Пусть K – точка пересечения прямой, проходящей через E параллельно AC, и прямой, проходящей через F параллельно

---

[1] См. также по этому поводу задачу 7 для 10 класса с финала V олимпиады имени И.Ф.Шарыгина, 2009 г.

BD (рис.149). Заметим, что

$$\angle(KE, EF) = \angle(AC, EF) = $$
$$= \frac{\cup CF + \cup AE}{2} = \frac{\cup FD + \cup EB}{2} = \angle(BD, EF) = \angle(KF, EF).$$

Это значит, что треугольник KEF равнобедренный, $KE = KF$. Значит, параллелограмм $EKFL$ – ромб, и KL – серединный перпендикуляр к EF. Поэтому KL проходит через O.

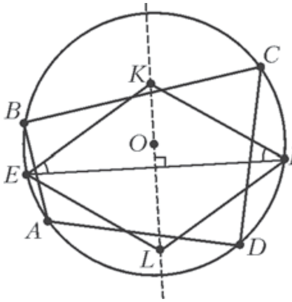


Рис. 149

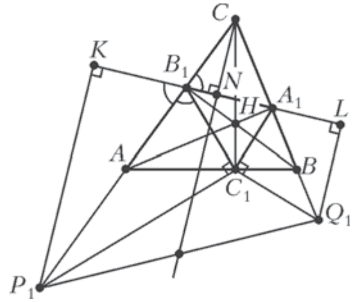


Рис. 150

6. *Первое решение.* Пусть N – проекция точки C на A_1B_1 (рис.150). Рассмотрим гомотетию с центром в точке C, при которой H перейдет в C_1, P – в P_1, Q – в Q_1. Тогда $C_1P_1 \perp C_1B_1$, $C_1Q_1 \perp C_1A_1$, и достаточно доказать, что прямая CN проходит через середину P_1Q_1.

Пусть K и L – проекции точек P_1 и Q_1 на прямую A_1B_1. Как известно, $\angle CB_1A_1 = \angle AB_1C_1$; значит, $\angle P_1B_1K = \angle P_1B_1C_1$, и прямоугольные треугольники P_1B_1K и $P_1B_1C_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $B_1K = B_1C_1$. Аналогично, $A_1L = A_1C_1$, т.е. длина отрезка KL равна периметру $2p$ треугольника $A_1B_1C_1$.

Поскольку C – центр вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, точка N – точка касания этой окружности с A_1B_1, и $B_1N = p - B_1C_1$. Тогда $KN = B_1C_1 + p - B_1C_1 = p$. Следовательно, N – середина отрезка KL. Наконец, поскольку прямые P_1K, CN и Q_1L параллельны, по теореме Фалеса прямая CN проходит через середину P_1Q_1, что и требовалось.

Второе решение. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$; тогда $\angle ACC_1 = 90° - \alpha$, $\angle BCC_1 = 90° - \beta$. Поскольку $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$, имеем $\angle HPC = 90° - \angle AB_1C_1 = 90° - \beta$ и, аналогично, $\angle HQC = 90° - \alpha$. Наконец, пусть перпендикуляр из C на A_1B_1 пересекает PQ в точке X (рис.151). Тогда $\angle PCX = 90° - \beta$, $\angle QCX = 90° - \alpha$.

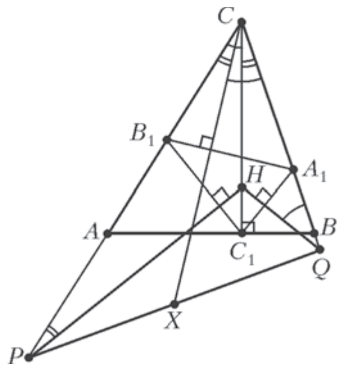


Рис. 151

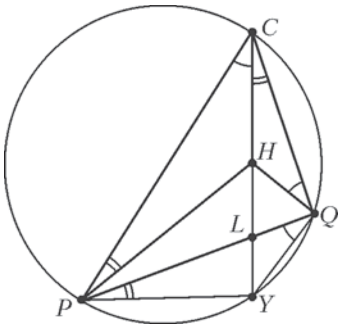


Рис. 152

Нам нужно доказать, что CX – медиана в ΔCPQ; поскольку $\angle PCX = \angle QCH$, это равносильно тому, что CH – симедиана. Итого, мы свели задачу к следующему известному факту (см. книгу: *А.Акопян*, «Геометрия в картинках», задача 4.4.6).

Лемма. *Пусть в треугольнике CPQ точка H такова, что* $\angle CPH = \angle QCH$ *и* $\angle CQH = \angle PCH$. *Тогда CH – симедиана в этом треугольнике.*

Доказательство. Пусть L – точка пересечения CH и PQ (рис.152). Тогда HL – биссектриса угла PHQ. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Заметим, что треугольники PHC и CHQ подобны по двум углам. Следовательно, $\frac{PH}{CH} = \frac{CH}{HQ} = \frac{PC}{CQ}$, откуда $\frac{PC^2}{CQ^2} = \frac{PH}{CH} \cdot \frac{CH}{HQ} = \frac{PH}{HQ} = \frac{PL}{LQ}$. Таким образом, CH – симедиана по определению.

Второй способ. Пусть описанная окружность треугольника CPQ пересекает CH вторично в точке Y (см. рис.152). Тогда $\angle QPY = \angle QCY = \angle CPH$, аналогично, $\angle PQY = \angle CQH$. Следовательно, биссектрисы углов HPL и CPY совпадают, равно как и биссектрисы углов HQL и CQY. Поскольку HY – биссектриса угла PHQ, то биссектрисы углов CPY и CQY пересекаются на CY. Следовательно, $\frac{PC}{PY} = \frac{QC}{QY}$, т.е. четырехугольник $CPYQ$ – гармонический. Отсюда и следует требуемое утверждение.

7. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Пусть O и O' – два возможных положения центра большой сферы (среди данных пяти точек), а A, B, C – три оставшиеся отмеченные точки.

Рассмотрим точки O, O', A, B. Пусть в конфигурации, когда O – центр большой сферы, радиусы сфер с соответствующими центрами равны R, r', r_a и r_b. Тогда $OO' = R - r'$, $OA = R - r_a$, $OB = R - r_b$, $O'A = r' + r_a$, $O'B = r' + r_b$, $AB = r_a + r_b$, откуда получаем $OO' - AB = OA - O'B = OB - O'A$; обозначим эту разность через d. Аналогично, из конфигурации, в которой O' – центр большой сферы, имеем $d = OO' - AB = O'A - OB = O'B - OA = -d$. Значит, $d = 0$, т.е. $OO' = AB$, $OA = O'B$, $OB = O'A$.

Рассматривая аналогично четверки точек (O, O', A, C) и (O, O', B, C), мы получаем $OO' = AB = AC = BC$ и $OA = O'B = OC = O'A = OB = O'C$. Итак, треугольник ABC – правильный (пусть его сторона равна $2\sqrt{3}$), а правильные пирамиды $OABC$ и $O'ABC$ равны; значит, O и O' симметричны относительно (ABC). Кроме того, $OO' = 2\sqrt{3}$, т.е. высота каждой пирамиды равна $\sqrt{3}$. Пусть H – общее основание этих высот, тогда $HO = HO' = \sqrt{3}$ и $HA = HB = HC = 2$, откуда $OA = O'A = \sqrt{7}$. Значит, радиусы трех сфер с центрами в A, B, C равны $\sqrt{3}$, а радиусы остальных двух сфер равны $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{3}$, откуда и следует ответ.

8. Обозначим через R и r радиусы внешней (Ω) и внутренней (ω) окружностей соответственно, а через D – центр ω (рис.153).

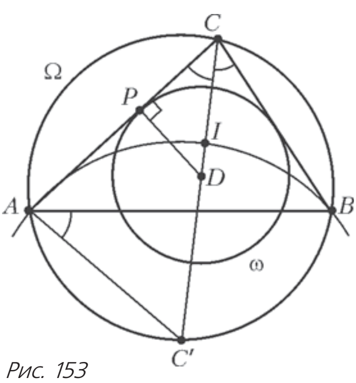


Рис. 153

Пусть C' – середина дуги AB окружности Ω, не содержащей точку C, а I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда точки I и D лежат на CC', а по лемме о трезубце имеем $C'I = C'A = 2R\sin\angle ACC'$.

С другой стороны, если P – точка касания AC с ω, то $\sin\angle ACC' = \dfrac{PD}{CD} = \dfrac{r}{CD}$; кроме того, произведение $d = CD \cdot C'D$ – это минус степень D относительно Ω, т.е. оно постоянно. Значит,

$$C'I = \frac{2Rr}{CD} = \frac{C'D \cdot 2Rr}{d},$$

откуда

$$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{C'D} - \overrightarrow{C'I} = \overrightarrow{C'D} \cdot \left(1 - \frac{2Rr}{d}\right).$$

Итак, точка I лежит на окружности, полученной из Ω гомотетией с центром D и коэффициентом $\frac{2Rr}{d} - 1$.

Наоборот, для любой точки I этой окружности можно восстановить точки C и C' как точки пересечения ID с Ω; при этом точка C' выбирается как образ I при обратной гомотетии. Для полученной точки C точка I является требуемым центром; значит, каждая точка полученной окружности подходит.

Замечание. Если $2Rr = d$, то полученная окружность вырождается в точку; в этом случае из приведенного решения легко получить формулу Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей.

X ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. Так как $\angle DAB = \angle EAC = 60°$, то $\angle DAE = \angle BAC$, следовательно, треугольники ADE и ABC равны и $\angle ADE = 90°$. Поэтому треугольник ADM – прямоугольный с углом $\angle A = 60°$. Значит, $AD = AB = AM/2$ (рис.154), т.е. точка M симметрична A относительно B.

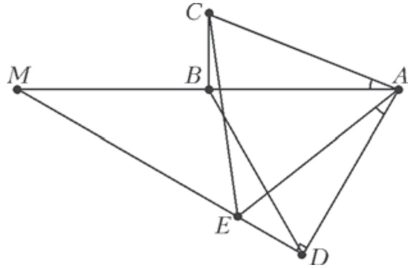


Рис. 154

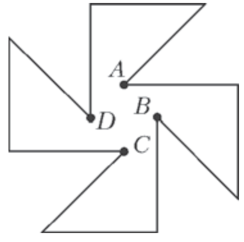


Рис. 155

2. Да, см. рисунок 155. Точки A, B, C, D лежат на средних линиях данного квадрата и образуют квадрат со стороной $\sqrt{2} - 1$.

3. Пусть CH – третья высота треугольника. Так как $\angle CBH = \angle CAB = \angle CBH$, треугольники CBD и CBH равны, т.е. $BD = BH$. Кроме того, в прямоугольном треугольнике AEB

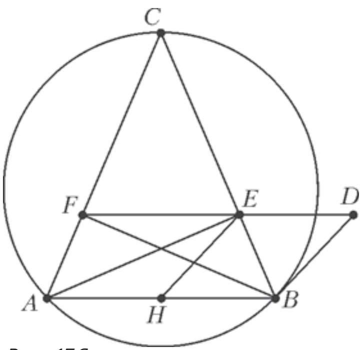


Рис. 156

EH – медиана, значит, $EH = HB = BD$ и $\angle BEH = \angle EBH = \angle EBD$. Следовательно, $EDBH$ – параллелограмм (рис. 156) и $DE \parallel AB$. Поскольку EF также параллельна AB, прямые DE и EF совпадают.

4. Пусть в треугольнике ABC с инцентром I вершины квадрата K и L лежат на стороне AB, вершина M на стороне AC и вершина N на стороне BC (очевидно, углы A и B острые). Опустим из I перпендикуляр IH на AB, и пусть отрезок DE проходит через I, параллелен AB и его концы D и E лежат соответственно на AC и BC. Нужно доказать, что $DE > IH$ и $H \in KL$. Первое следует из того, что $IH = r$ и $DE > 2r$, где r – радиус вписанной окружности. Теперь продолжим IH за точку I до пересечения с одной из сторон треугольника ABC в некоторой точке F. Пусть для определенности $F \in AC$. Тогда заведомо H и K по одну сторону от L. Проведем через F прямую, параллельную AB, до пересечения с BC в точке G. Достаточно доказать, что $FG < FH$: тогда I и L по одну сторону от K и потому $I \in KL$, что и требуется.

Заметим, что FH – диаметр вписанной окружности, продолженный до пересечения с AC, поэтому F вне окружности и $FH > 2r$. Перпендикулярная прямая через F не имеет общих точек с окружностью. Поэтому точки касания окружности с AC и BC находятся между FG и AB. Следовательно, соединяющая их хорда больше, чем FG. А так как она меньше $2r$, то $FG < 2r < FH$, что и требовалось.

Комментарий. Из решения видно, что вместо квадрата можно взять любой прямоугольник, у которого большая сторона лежит на стороне треугольника и не превосходит удвоенной меньшей стороны.

5. $AB : AC : BC = 1 : 2 : \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

По свойству биссектрисы, $AC : AB = LA : LB = 2 : 1$. Это следует также из свойства медианы: именно, продолжим AB за точку B на отрезок $BD = AB$. Тогда BC – медиана треугольника ADC, и так как $AL : LB = 2 : 1$, то AL также лежит на медиане. Но это и биссектриса, поэтому $AC = AD = 2AB$. Теперь по теореме Пифагора получаем: $AC^2 - AH^2 = AB^2 - BH^2$, или $4AB^2 -$

$-25BH^2 = AB^2 - BH^2$, откуда $AB = 2\sqrt{2}BH$ и $BC : AB = 6BH : AB = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. Прямая, перпендикулярная лучу OP и пересекающая его в точке, удаленной от O на расстояние $(OP + OX)/2$.

Пусть K, L – проекции точки Y на OP и OX. Из определения точки Y следует, что $YP = YX$ и $YK = YL$. Значит, треугольники YKP и YLX равны, т.е. $XL = PK$. Кроме того, $OL = OK$. Поскольку длины отрезков OP и OX не равны, одна из них равна сумме длин отрезков OK и KP, а другая – их разности. Следовательно, $OK = (OP + OX)/2$ (рис.157). Очевидно, что любая точка прямой принадлежит искомому ГМТ.

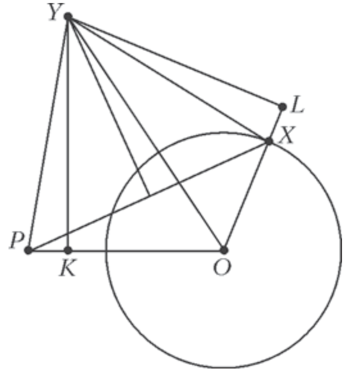


Рис. 157

7. Пусть точка K симметрична A относительно B. Тогда E – центр описанной окружности треугольника ACK. С другой стороны, так как $BKCD$ – параллелограмм, то $AF \perp CK$ и F – ортоцентр треугольника ACK. Следовательно, медиана CB делит EF в отношении 1 : 2 (рис.158).

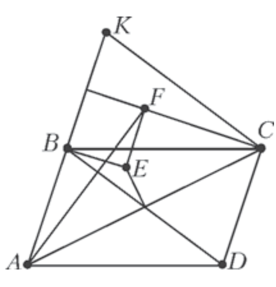


Рис. 158

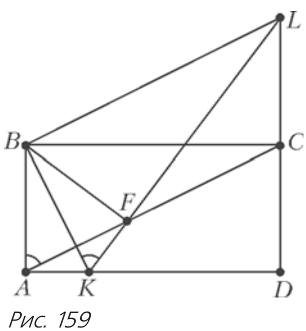


Рис. 159

8. *Первое решение.* Так как $\angle ABK = \angle CBL$, треугольники ABK и CBL подобны. Значит треугольники ABC и KBL также подобны и $\angle BKF = \angle BAF$. Следовательно, четырехугольник $ABFK$ – вписанный и $\angle BFK = 90^\circ$ (рис.159).

Второе решение. Заметим, что точка B лежит на описанной окружности треугольника KLD. Точки A и C являются основаниями перпендикуляров из точки B на прямые KD и DL. А значит, основание перпендикуляра из точки B на прямую KL по теореме о прямой Симсона лежит на прямой AC, т.е. совпадает с точкой F, что и требовалось доказать.

9. Пусть N – вторая точка пересечения ω_1 с AL (рис.160). Тогда композиция симметрии относительно AL и гомотетии с центром A переводит дугу NE в дугу LM. Следовательно, опирающиеся на эти дуги углы ALE и MQE равны, что равносильно утверждению задачи.

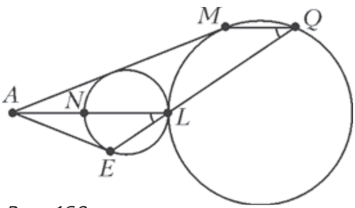


Рис. 160

10. Пусть O_1, O_2 – центры данных окружностей, r_1, r_2 – их радиусы, O – середина отрезка O_1O_2, l_1' – прямая, параллельная l_1 и проходящая через O_1, l_2' – прямая, симметричная l_1' относительно средней линии (рис.161). Тогда расстояние от O_2 до l_2' равно $|r_2 - r_1|$. Применив гомотетию с центром O_1 и коэффициентом $1/2$, получаем, что расстояние d от O до средней линии равно $|r_2 - r_1|/2$, т.е. все средние линии касаются окружности с центром O и радиусом d.

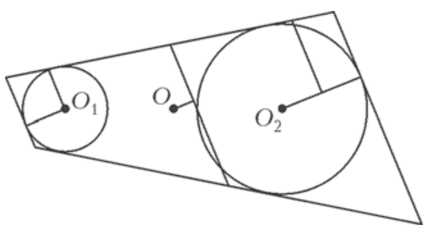


Рис. 161

11. Обозначим точки пересечения прямых MN и LM с прямой AB как P и Q соответственно. Треугольники AKN, BLK, CML и DMN равны по гипотенузе и острому углу. Пусть $AK = a$ и $BK = b$, тогда $BL = CM = DN = a$, $CL = MD = NA = b$. Поскольку треугольники PKN и QLK прямоугольные, $PA \cdot a = b^2$ и $BK \cdot b = a^2$. Из подобия треугольников PEK и DEM получим, что

$$\frac{KE}{DE} = \frac{a + b^2/a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

но из подобия треугольников QFK и CFM следует, что

$$\frac{FK}{CF} = \frac{b + a^2/b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Значит, $KE/DE = FK/CF$ и $EF \parallel AB$, что и требовалось доказать.

12. Так как $\angle K_1AB = \angle AK_2B$, $\angle K_2AB = \angle AK_1B$, треугольники AK_1B и K_2AB подобны (рис.162). Применяя к ним теорему синусов, получаем:

$$\frac{\sin\angle K_1AB}{\sin\angle K_2AB} = \frac{AK_1}{AK_2} = \frac{AL_2}{AL_1},$$

что равносильно утверждению задачи.

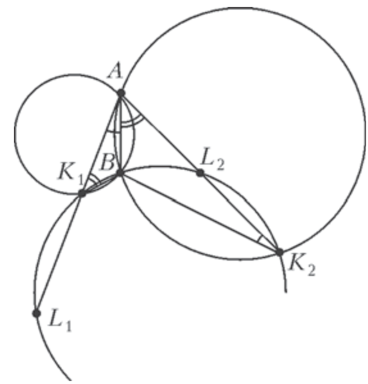


Рис. 162

13. Пусть Q – вторая точка пересечения прямой AC с окружностью A_1PC_1. Тогда

$$\angle QA_1C_1 = \angle QPC_1 = \angle QCO = \angle QAO = \angle AOA_1 = \angle QCA_1.$$

Следовательно, $QA_1 = QC_1$ и $\angle A_1QC_1 = \angle AOC = 2\angle A_1BC_1$, т.е. Q – центр описанной окружности треугольника A_1BC_1 (рис.163). Таким образом, этот центр движется по прямой AC.

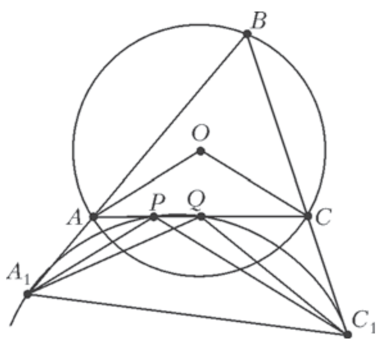


Рис. 163

14. Построим круг, концентричный данному, вдвое меньшей площади. Разделим внутренний круг пополам произвольным диаметром, а внешнее кольцо – перпендикулярным диаметром. Объединив половину внутреннего круга с половиной внешнего кольца, получим искомое множество.

15. а) AC; б) BK.

а) Вспомним, что в неравнобедренном треугольнике биссектриса проходит между медианой и высотой, а высота – между биссектрисой и меньшей из прилежащих сторон. Предположим, что $AB < AC$. Тогда биссектриса угла A пересекает биссектрису угла B в точке, лежащей между K и AC. Через эту точку проходит и биссектриса угла C. Так как она лежит между медианой и меньшей из прилежащих сторон, то $AC < BC$. Значит, AC – средняя по величине из сторон треугольника.

Пусть теперь $AB > AC$. Тогда рассуждение аналогичное: точка пересечения биссектрис лежит между прямыми AK и AB, биссектриса угла C лежит между CK и BC, поэтому $AC > BC$. Снова AC – средняя по величине.

б) Из условия задачи следует, что высота из A проходит внутри треугольника, т.е. углы B и C – острые. Применив теорему Чевы, получаем, что $\sin\angle A = \cos\angle C \operatorname{tg}\angle B$ или $\operatorname{tg}\angle C = \operatorname{tg}\angle B \dfrac{1-\cos\angle B}{\cos\angle B}$. Поэтому при $\angle B < 60°$ имеем $\angle C < \angle B < 60° < \angle A$, а при $\angle B > 60°$ – $\angle C > \angle B > 60° > \angle A$.

В первом случае $\angle KBA < 30° < \angle KAB$ и $\angle KCB < \angle C/2 < \angle B/2 = \angle KBC$, следовательно, $KA < KB < KC$. Аналогично, во втором случае получаем $KA > KB > KC$.

Комментарий. Из условий задачи невозможно определить, какая сторона наибольшая и какая наименьшая, а также, какой из отрезков KA, KC наибольший и какой наименьший.

16. Окружности с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 проходят через основания соответствующих высот треугольника, поэтому степени ортоцентра H относительно всех трех окружностей равны. Следовательно, прямая DH является их общей радикальной осью и центры окружностей лежат на одной прямой.

Комментарий. Применяя теорему Менелая к треугольнику ABC и треугольнику, образованному его средними линиями, нетрудно показать, что точки A_1, B_1, C_1 также лежат на одной прямой.

17. Будем пользоваться следующими известными фактами.

1) Если даны две параллельные прямые, то, пользуясь только линейкой, можно разделить отрезок на одной из этих прямых пополам.

2) Если даны две параллельные прямые, то, пользуясь только линейкой, можно провести через не лежащую на них точку параллельную им прямую.

Заметим теперь, что прямая EF является серединным перпендикуляром к BD. Поэтому точки K, L ее пересечения с AB и BC являются вершинами квадрата $BKDL$. Используя параллельные прямые BC и KD, разделим отрезок BC пополам. Используя параллельные прямые AB и DL, построим параллельную им прямую, проходящую через середину BC. Эта прямая является серединным перпендикуляром к BC и, значит, пересекает EF в центре описанной окружности треугольника BCD. Аналогично строится центр описанной окружности треугольника ABD.

18. Пусть J – вторая точка пересечения окружностей AIC и BID. При инверсии относительно вписанной в $ABCD$ окружности точки A, B, C, D перейдут в вершины параллелограмма, а J – в его центр. Следовательно, $AJ/CJ = AI/CI$, т.е. прямая IJ

является симедианой треугольника AIC и, значит, проходит через X. Аналогично получаем, что эта прямая проходит через Y.

19. При гомотетии с центром P точки B, C переходят в E, F. Значит, A переходит в полюс прямой EF относительно ω_2, т.е. полюс EF лежит на прямой AP, что равносильно утверждению задачи.

20. Пусть $A_1'B_1'$ – переменная хорда окружности, равная A_1B_1, т.е. полученная из A_1B_1 поворотом вокруг центра O. Легко видеть, что окружность (LAB) будет геометрическим местом точек $K' = AA_1' \cap BB_1'$ при вращении хорды $A_1'B_1'$. Тогда, так как точка P является пересечением четырех таких ГМТ, прямые AP, BP, CP и DP пересекают окружность в точках A', B', C', D', образующих четырехугольник, равный $A_1B_1C_1D_1$. Рассмотрим поворот вокруг O, переводящий $A'B'C'D'$ в $A_1B_1C_1D_1$, а P в некоторую точку Q. Прямые A_1Q, B_1Q, C_1Q и D_1Q пересекают окружность в четырех точках, образующих четырехугольник, равный $ABCD$. Применив аналогичные рассуждения к описанным окружностям треугольников KD_1A_1, LA_1B_1, MB_1C_1 и NC_1D_1, получим, что все они проходят через Q. Кроме того, так как OQ – образ OP при повороте, то $OP = OQ$, что равносильно п.б).

21. Рассмотрим точку пересечения BC и AD. Обозначим ее через R. Тогда R лежит на одной прямой с двумя другими точками касания (P и Q) окружности со сторонами четырехугольника.

Пусть EE_1 пересекает AD в точке M. Рассмотрим три окружности: вписанную в четырехугольник, а также окружности AED и AID, где I – центр вписанной окружности. Легко видеть, что радикальная ось AID и вписанной окружности является средней линией треугольника FPQ. Так как две другие радикальные оси пересекаются в точке M, получаем, что $RM = MF$ (рис.164).

Аналогично, FF_1 пересекает BC в точке N, такой, что $RN = NE$. Следовательно, прямые EE_1 и FF_1 симметричны относительно биссектрисы угла ERF. Значит, точки E_1 и F_1 также симметричны и EFF_1E_1 – равнобокая трапеция.

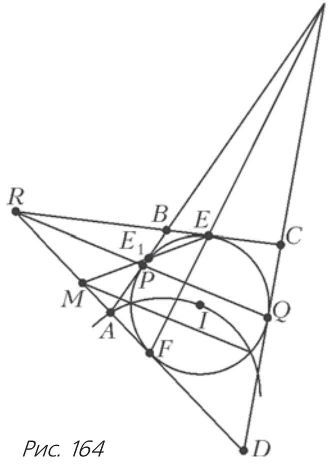


Рис. 164

22. Да, возьмем правильный треугольник ABC со стороной 1 и две точки S_1, S_2, симметричные относительно его плоскости и такие, что $S_1S_2 < S_1A = S_1B = S_1C < 1$. Очевидно, что единственная диагональ S_1S_2 полученного многогранника меньше любого из его ребер.

23. а) Рассмотрим три сферы, касающиеся плоскости в точках A, B, C и друг друга внешним образом. Легко видеть, что если радиусы этих сфер равны x, y, z, то $AB = 2\sqrt{xy}$ и т.д. Поэтому две сферы, касающиеся трех данных и плоскости, будут касаться плоскости в точках D и D_1. Таким образом можно построить восемь сфер a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, касающихся плоскости в точках A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, причем сферы a и a_1 касаются b, c, d и т.д.

Сделаем инверсию пространства с центром в точке касания сфер c и d. Тогда эти сферы перейдут в две параллельные плоскости, а исходная плоскость, a и b – в три равные сферы, расположенные между этими плоскостями и попарно касающиеся. Сферы c_1 и d_1 перейдут в две сферы, касающиеся этих трех, кроме того, каждая из этих сфер касается одной из плоскостей, следовательно, они симметричны относительно плоскости центров трех остальных сфер. Поэтому образы точек A, B, C_1, D_1 лежат в одной плоскости, а сами эти точки на одной окружности.

б) Сделаем теперь инверсию с центром в точке D. Тогда сфера d перейдет в плоскость, параллельную плоскости ABC, а сферы a, b, c – в три равные попарно касающиеся сферы. Следовательно, точки их касания с плоскостью будут вершинами правильного треугольника, а точка D_1 перейдет в центр этого треугольника. Образы точек A_1, B_1, C_1 будут образовывать правильный треугольник с тем же центром, т.е. четверка A_1, B_1, C_1, D_1 тригармоническая.

24. *Первое решение.* Поскольку точки P, Q, K и L лежат в одной плоскости, то отрезки PL и QP пересекаются в точке R, принадлежащей прямой BS. Обозначим через T точку касания сферы и основания пирамиды. Заметим, что равны треугольники QBK и QBT, PBL и PBT (равны соответствующие касательные к сфере). Аналогично равны треугольники RKB и RLB. Значит, $\angle QTB = \angle QKB = \angle PLB = \angle PTB$. Но в любой описанной пирамиде $\angle CTQ = \angle PTA$ и $\angle CTD = \angle ATB = 180°$, следовательно, $\angle PTB = 180°$.

Второе решение. Сделаем проективное преобразование, сохраняющее сферу и переводящее плоскость PQS в бесконечно удаленную. Тогда пирамида перейдет в бесконечную четырехугольную призму, а условие пересечения прямых PK и QL будет равносильно тому, что грани этой призмы, проходящие через AB и BC, образуют равные углы с плоскостью $ABCD$. Но тогда призма будет симметрична относительно плоскости, проходящей через BD и перпендикулярной $ABCD$. Значит, точка касания сферы с основанием лежит в плоскости симметрии.

Финальный тур

8 класс

1. *Первый способ.* Пусть I_A – центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC и продолжения стороны BC в точках B_2 и A_0' соответственно (рис.165). Тогда $I_AB_2CA_0'$ – квадрат, а значит, $I_AA_0' = B_2C$. Как известно, $B_2C = AB_1$, значит, $I_AA_0' = AB_1$. Следовательно, четырехугольник $A_0'I_AAB_1$ – параллелограмм, т.е. $A_0'B_1 \parallel I_AA$. С другой стороны, $I_AA \parallel B_1C_1$, следовательно, точки A_0', B_1 и C_1 лежат на одной прямой и A_0' совпадает с A_0. Тогда BA_0 – отрезок касательной к вневписанной окружности, т.е. он равен полупериметру треугольника ABC. Аналогично получаем, что отрезок AB_0 равен полупериметру этого же треугольника, откуда $AB_0 = BA_0$.

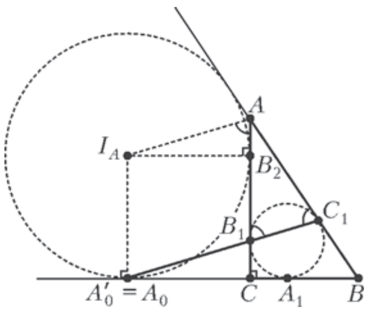


Рис. 165

Второй способ. Так как отрезки CA_1 и CB_1 равны радиусу r вписанной окружности, а прямые C_1A_1, C_1B_1 перпендикулярны биссектрисам углов B и A соответственно, из прямоугольных треугольников CA_0B_1 и CB_0A_1 получаем, что

$$A_0C = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}, \quad B_0C = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}.$$

С другой стороны,

$$AC = r + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}}, \quad BC = r + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}.$$

Следовательно,

$$AB_0 = AC + CB_0 = BC + CA_0 = BA_0.$$

2. Да.

Первый способ. Так как треугольники H_aH_bC и ABC подобны (рис.166), треугольники L_aL_bC и ABC также подобны, т.е. $\dfrac{L_aC}{AC}=\dfrac{L_bC}{BC}$. Значит, подобны треугольники AL_aC и BL_bC (рис.167). Следовательно, $\angle L_aBL_b=\angle L_bAL_a$, но эти углы равны половинам углов B и A треугольника. Значит, $AC = BC$.

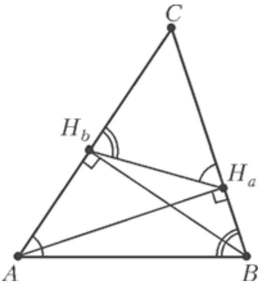


Рис. 166

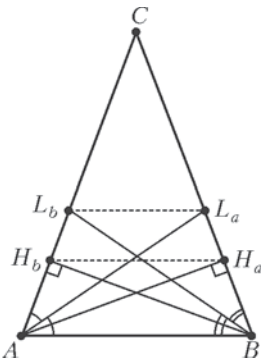


Рис. 167

Второй способ. Так H_aH_b и AB антипараллельны относительно прямых AC и BC, L_aL_b и AB также антипараллельны относительно AC и BC, значит, четырехугольник AL_bL_aB вписанный. Тогда, как и в предыдущем решении, получаем, что $\angle L_aBL_b=\angle L_bAL_a$ и $AC = BC$.

3. 75°.

Первый способ. Продолжим отрезок MN на его длину в обе стороны и получим точки K и L (рис.168). Так как M − общая середина AC и KN, то $AKCN$ − параллелограмм. Тогда $\angle CKM=45^\circ$, $\angle KCM=15^\circ$. Отметим на отрезке CM точку P так, чтобы угол CKP был равен 15°. Тогда отрезок KP разобьет треугольник KCM на два равнобедренных треугольника. Кроме того, $\angle PMN=60^\circ$, поэтому треугольник MPN − равносторонний. Треугольники PLN и PKM равны, треугольник CPL − равнобедренный и прямоугольный, отсюда $\angle CLM=\angle CLP+\angle MLP=75^\circ=$ $=\angle ABM$, так как $CLBM$ − параллелограмм.

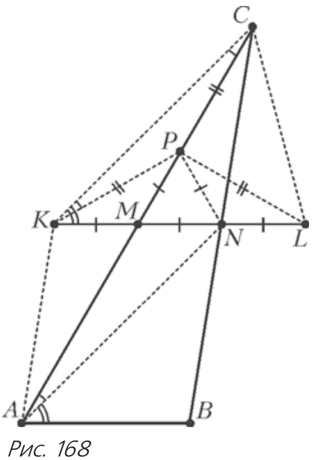


Рис. 168

Можно использовать также то, что построенная точка P – центр описанной окружности треугольника KCL.

Второй способ. Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC, F – середина GB, треугольник GFO равносторонний, причем точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно MB (рис.169). Поскольку $\angle MOB = 120°$, то O – центр окружности, описанной около треугольника MAB, при этом $\angle MOG = 30° = 2\angle MAG$, значит, AG и OG пересекаются на описанной окружности треугольника AMB, т.е. точки A, O и G лежат на одной прямой. Тогда $\angle ABM = \dfrac{\angle MOA}{2} = 75°$.

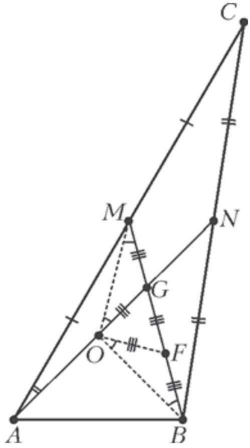


Рис. 169

4. Пусть ABC – данный треугольник ($AC = BC$). Заметим, что, сгибая бумагу, можно найти середину любого заданного отрезка. Построим медиану AA_0. По теореме Фалеса вертикальные линии сетки делят ее на четыре равные части. Поэтому, построив точку A_1, такую что $AA_1 = AA_0/4$, и перегнув треугольник по прямой CA_1, получим точку C_1, такую что $AC_1 = AB/7$ (рис.170). Теперь, построив отрезки $C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_5C_6 = AC_1$, мы найдем все узлы сетки, лежащие на стороне AB. Перегнув треугольник по прямой, проходящей через C_2, так, чтобы точка C_3 попала на прямую CC_1, мы получим линию сетки, проходящую через C_2, и т.д. Перпендикулярные линии строятся аналогично.

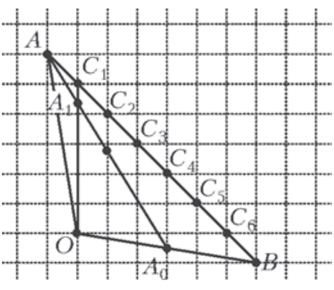


Рис. 170

5. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 80°$ (рис.171). Проведем высоту AH. Тогда $\angle CAH = \angle MHA = 10°$, где M – середина AC. При этом $\angle HAL = 10°$, где L – основание биссектрисы треугольника HAB, проведенной из вершины A. Зна-

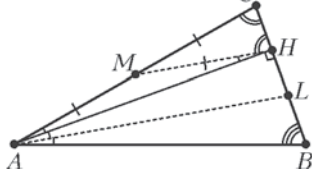


Рис. 171

чит, медиана треугольника AHC, проведенная из вершины H, и биссектриса треугольника BAH, проведенная из вершины A, параллельны, а высота AH является искомым разделяющим отрезком.

6. Обозначим через S точку пересечения XO_2 и YO_1 (рис.172). Пусть r_1 и r_2 – радиусы соответствующих окружностей. Тогда

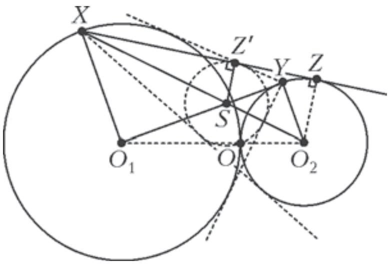


Рис. 172

$$\frac{XS}{SO_2} = \frac{O_1S}{SY} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1O}{OO_2}.$$

Значит, $SO \parallel O_2Y$ и

$$SO = \frac{r_1}{r_1 + r_2} O_2Y = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Пусть XZ – одна из касательных из X ко второй окружности, а Z' – проекция S на XZ. Тогда

$$SZ' = \frac{r_1}{r_1 + r_2} O_2Z = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = SO.$$

Аналогично доказывается, что расстояние от S до остальных касательных также равно SO, т.е. S и есть центр требуемой окружности.

7. Пусть точки A и B – концы ломаной. Рассмотрим диаметр XY, параллельный AB (рис.173). Пусть точка C симметрична B относительно XY, тогда AC – диаметр окружности. Рассмотрим любую точку Z хорды XY. Так как $AZ + BZ = AZ + CZ \geq AC$, Z не может лежать на ломаной, а значит, диаметр XY подходит.

8. *Первый способ.* Пусть ω – данная окружность (с центром

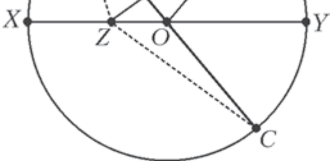


Рис. 173

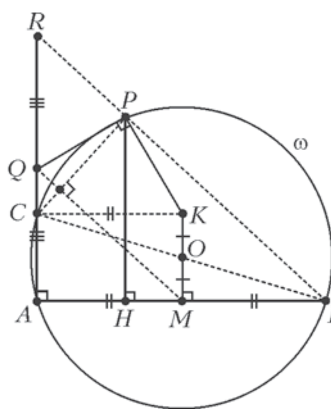


Рис. 174

в точке O) и QA пересекает ω в точке C, отличной от A (рис.174). Так как BC – диаметр ω, то отрезки BC и MK делят друг друга пополам, т.е. $CKBM$ – параллелограмм. Тогда, поскольку M – середина AB, то $CKMA$ – прямоугольник. Докажем, что отрезки MQ и PC перпендикулярны. Мы имеем:

$$MC^2 - MP^2 - QC^2 + QP^2 =$$

$$= \left(CK^2 + MK^2\right) - \left(2PO^2 + 2OK^2 - PK^2\right) -$$

$$- \left(QK^2 - CK^2\right) + \left(QK^2 - PK^2\right) =$$

$$= 2CK^2 + 4OK^2 - 2PQ^2 - 2OK^2 = 2CK^2 + 2OK^2 - 2OC^2 = 0 .$$

Значит, $MQ \perp PC$. Пусть BP пересекает QA в точке R. Так как CB – диаметр ω, $BR \perp PC$. Следовательно, $MQ \parallel BR$, и поскольку M – середина AB, то Q – середина AR. Значит, QB делит PH пополам.

Второй способ. Заметим, что $\angle PBA \neq 90^\circ$; иначе $PK \parallel AB$, и точка Q не существует. Тогда прямая BP пересекает AQ в некоторой точке R (рис.175). Треугольники BPH и BRA гомотетичны, так что достаточно доказать, что Q – середина AR.

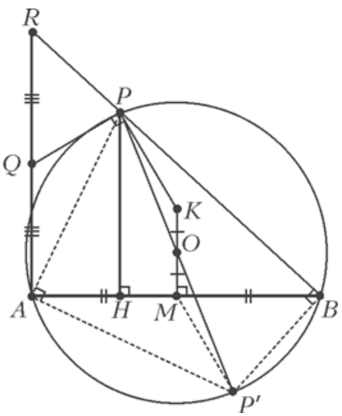


Рис. 175

Пусть P' – точка, диаметрально противоположная к P. Тогда $PA \perp P'A$, $PR \perp P'B$, $AR \perp AB$, т.е. в треугольниках $P'AB$ и PAR соответственные стороны перпендикулярны. Значит, треугольники подобны, и их медианы из вершин P и P' также перпендикулярны. Но из симметрии относительно O следует, что $P'M \parallel PK$ и $P'M \perp PQ$. Это и означает, что PQ – медиана в ΔPAR.

9 класс

1. *Первый способ.* Без ограничения общности можно считать, что дуги ABC и BCD не превосходят полуокружности. Тогда $\cup AD = 2\pi - \cup ABC - \cup BCD + \cup BC > \cup BC$. Поскольку дуга $ABCD$ также больше дуги BC, получаем, что $AD > BC$.

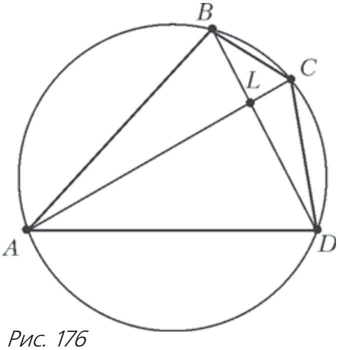


Рис. 176

Теперь, если $AC > BD$, то $\cup ABC > \cup BCD$, $\cup AB > \cup CD$ и $AB > CD$. При $AC < BD$ все неравенства меняются на противоположные.

Второй способ. Пусть AL – самый длинный из отрезков AL, BL, CL, DL (рис.176). Тогда, в силу равенства $AL \cdot CL = BL \cdot DL$, CL – самый короткий из этих отрезков. Тогда $AL - CL > |BL - DL|$, отсюда

$$AC^2 = (AL + CL)^2 = (AL - CL)^2 + 4AL \cdot CL >$$
$$> |BL - DL|^2 + 4BL \cdot DL = (BL + DL)^2 = BD^2,$$

т.е. $AC > BD$. Кроме того, из подобия треугольников ALB и DLC получаем, что $\frac{AB}{CD} = \frac{AL}{DL}$, т.е. $AB > CD$. Аналогично из подобия треугольников ALD и BLC получаем $AD > BC$.

Третий способ. Заметим, что $AC = 2R\sin\angle B$ и $BD = 2R\sin\angle A$, поэтому неравенство $AC > BD$ эквивалентно неравенству $\sin\angle B > \sin\angle A$.

Далее,

$$(AD - BC)(AB - CD) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AD \cdot AB + BC \cdot CD > AD \cdot CD + BC \cdot AB,$$

что эквивалентно (домножим на
$\frac{1}{2}\sin\angle A\sin\angle B = \frac{1}{2}\sin\angle A\sin\angle D = \frac{1}{2}\sin\angle C\sin\angle B$)

$$\left(\frac{AD \cdot AB\sin\angle A}{2} + \frac{BC \cdot CD\sin\angle C}{2}\right)\sin\angle B >$$
$$\left(\frac{AD \cdot CD\sin\angle D}{2} + \frac{BC \cdot AB\sin\angle B}{2}\right)\sin\angle A,$$

значит,

$$\big(S(DAB) + S(DCB)\big)\sin\angle B > \big(S(CDA) + S(ABC)\big)\sin\angle A,$$

откуда

$$S(ABCD)\sin\angle B > S(ABCD)\sin\angle A, \text{ т.е. } \sin\angle B > \sin\angle A.$$

2. *Первый способ.* Пусть M, N, K – середины AB, CD и AC соответственно (рис.177). Тогда степень точки K относительно окружности с диаметром AB равна $KM^2 - MA^2 = \dfrac{CB^2 - AB^2}{4}$, а

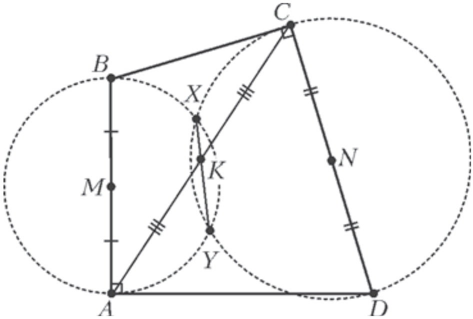


Рис. 177

относительно окружности с диаметром $CD - \dfrac{AD^2 - CD^2}{4}$. Так как $AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2$, получаем, что степени равны.

Второй способ. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке Z. Центры данных в условии окружностей ω_1 и ω_2 – середины O_1 и O_2 отрезков AB и CD соответственно. Пусть ω – окружность $ABCD$ (с диаметром BD). Тогда AB – радикальная ось окружностей ω и ω_1, CD – радикальная ось окружностей ω и ω_2, а XY – радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2, значит, XY проходит через Z. Теперь для решения задачи достаточно доказать, что $ZK \perp O_1O_2$ (где K – середина диагонали AC). Но нетрудно заметить (из средних линий треугольников ABC и ADC), что $O_1K \perp ZO_2$ и $O_2K \perp ZO_1$.

3. *Первый способ.* Пусть M, K и L – середины сторон AB, BC и AC соответственно (рис.178). Тогда $\angle LEM = 2\angle LKM = 2\angle A$. Обозначим стороны $\angle A$ через l_1 и l_2 так, чтобы при повороте вокруг A на $\angle A$ против часовой стрелки l_1 переходила в l_2. Тогда

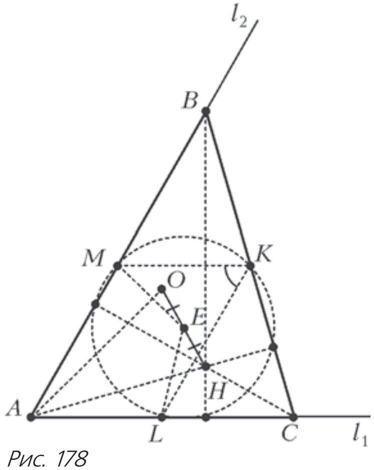


Рис. 178

при повороте по часовой стрелке вокруг E на угол $2\angle A$ середина стороны треугольника, лежащей на l_1, перейдет в середину стороны, лежащей на l_2. Поэтому точка, симметричная A относительно M, будет вершиной треугольника. Вторая вершина строится аналогично.

Второй способ. Пусть O и H – центр описанной окружности и ортоцентр треугольника. Тогда E – середина отрезка OH, $\angle BAO = \angle HAC$ и $AH = 2AO\cos\angle A$. Следовательно, композиция симметрии относительно биссектрисы угла A, гомотетии с центром A и коэффициентом $2\cos\angle A$ и симметрии относительно E является подобием с центром O. Соответственно, найдя центр этого подобия, можно построить точки B и C как вторые точки пересечения сторон данного угла и окружности с центром O, проходящей через A.

Примечание. При $\angle A = 60^\circ$ рассмотренное подобие будет симметрией относительно прямой, проходящей через E и перпендикулярной биссектрисе угла A. Соответственно, в качестве O можно брать любую точку этой прямой. В остальных случаях решение единственно.

4. *Первый способ.* Пусть H_a, H_b, H_c – основания высот треугольника. Так как $AH \cdot HH_a = BH \cdot HH_b = CH \cdot HH_c$, то существует инверсия с центром H, переводящая точки A, B, C в H_a, H_b, H_c соответственно (в случае остроугольного треугольника надо взять композицию инверсии и центральной симметрии относительно H). При этой инверсии стороны треугольника перейдут в окружности с диаметрами AH, BH, CH, а вписанная окружность – в прямую, касающуюся этих окружностей. Искомая прямая получается из этой гомотетией с центром H и коэффициентом 2.

Второй способ. Пусть I – центр вписанной окружности, A_1, B_1, C_1 – точки ее касания со сторонами BC, AC, AB соответственно, а A_2, B_2, C_2 – такие точки (на трех окружностях из условия), что $\Delta A_1IH \sim \Delta HAA_2$, $\Delta B_1IH \sim \Delta HBB_2$ и $\Delta C_1IH \sim$ $\sim \Delta HCC_2$ (подобные треугольники расположены так, что их стороны соответственно параллельны). Касательные в этих точках к этим окружностям параллельны касательной в H ко вписанной; достаточно доказать, что эти касательные совпадают, а для этого достаточно показать, что проекции векторов $\overrightarrow{HA_2}$, $\overrightarrow{HB_2}$ и $\overrightarrow{HC_2}$ на IH равны. Нетрудно видеть, что они сонаправлены. Поскольку HA_2 составляет равные углы с IH и IA_1, длина первой проекции равна длине проекции HA_2 на AH, т.е. $\frac{AH}{r} \cdot HA'$, где A' – основание высоты. Аналогично вычисляются остальные проекции; осталось заметить, что $AH \cdot HA' =$ $= BH \cdot HB' = CH \cdot HC'$.

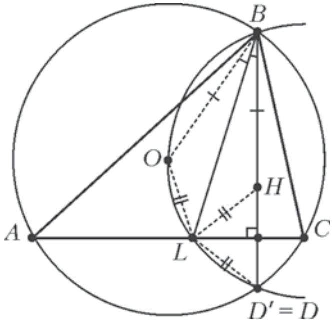


Рис. 179

5. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC, D' – точка, симметричная H относительно AC (рис.179). Тогда D' лежит на описанной окружности, а так как $\angle B = 60°$, то $BO = BH$ (этот факт можно доказать, например, так: заметим, что поскольку $\angle B = 60°$, то описанные окружности треугольников ABC и AOC равны и совмещаются параллельным переносом на вектор BH, поэтому $BH = R = BO$). Значит, поскольку BL – биссектриса угла OBH, то $LO = LH = LD'$. Треугольники LBO и LBH равны (по двум сторонам и углу между ними), отсюда $\angle BOL = \angle BHL$. Из симметрии относительно AC: $\angle BD'L = \angle LHD' = 180° - \angle BHL$, отсюда $\angle BOL + \angle BD'L = 180°$. Следовательно, четырехугольник $BOLD'$ вписанный и D' совпадает с D.

6. *Первый способ.* Обозначим через A_1, B_1 и C_1 середины дуг BC, CA и AB, не содержащих других вершин треугольника ABC (рис.180), кроме того, пусть A_0 и B_0 – точки касания вписанной окружности со сторонами BC и CA соответственно.

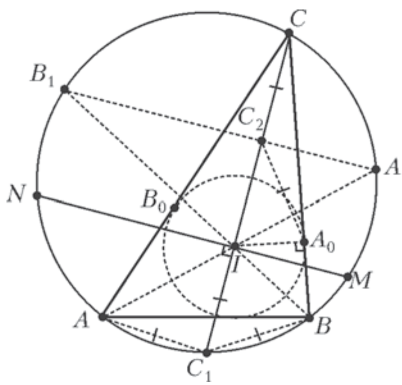


Рис. 180

Пусть MN проходит через I. Так как A_1N и B_1M – диаметры, то A_1B_1 и MN равны и параллельны. Как известно, $A_1B_1 \perp CC_1$ и $CC_2 = C_2I$. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к CC_1 имеем $CC_2 = C_1I$, кроме того, из прямоугольного треугольника CA_0I получим, что $C_2A_0 = C_2C$. Тогда, по теореме о трезубце, $C_2A_0 = C_2C = IC_1 = C_1A = C_1B$. Значит, треугольники C_2CA_0 и C_1AB равны ($AB = CA_0$). Отсюда и получаем равенство

$$AC + CB = AB_0 + B_0C + CA_0 + A_0B = 2AB + A_0B = 3AB.$$

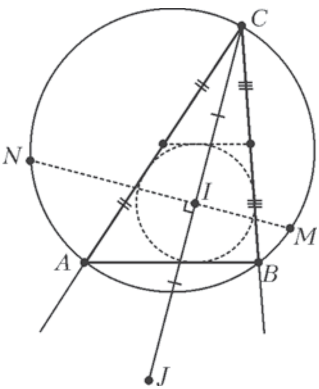


Рис. 181

В обратную сторону аналогично.

Второй способ. Пусть J – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (рис.181). По теореме о трилистнике точки M и N являются центрами окружностей ACJ и BCJ, следовательно, MN – серединный перпендикуляр к отрезку CJ, т.е. I – середина CJ. Применив гомотетию с центром C и коэффициентом $1/2$, получим, что вписанная окружность касается средней линии треугольника, параллельной AB. Условие описанности трапеции, образованной этой средней линией и сторонами, равносильно требуемому равенству. Обратное утверждение доказывается аналогично.

7. *Первый способ.* Введем обозначения, как на рисунке 182. Пусть r_a, r_b и r_c – радиусы окружностей с центрами O_a, O_b и

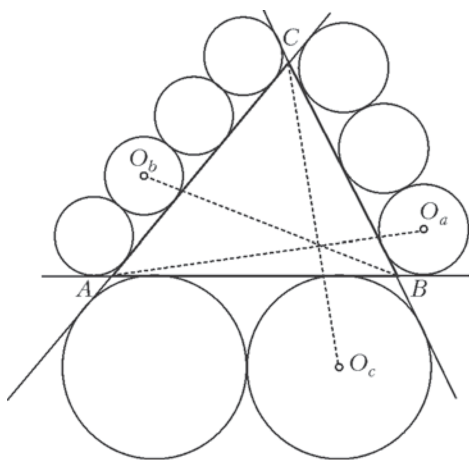


Рис. 182

O_c соответственно, $d_a(X)$ – расстояние от точки X до BC, d_b и d_c определены аналогично.

Фигура, состоящая из лучей CA, CB и трех первых, считая от C, окружностей, касающихся CA, подобна фигуре из лучей

CB, CA и окружностей, касающихся CB. Следовательно, $d_a(O_b):r_b = d_b(O_a):r_a$. Аналогичные равенства верны для вершин A и B.

Теперь мы имеем

$$\frac{d_c(O_a)}{d_b(O_a)}\cdot\frac{d_a(O_b)}{d_c(O_b)}\cdot\frac{d_b(O_c)}{d_a(O_c)} = \frac{d_c(O_a)}{d_a(O_c)}\cdot\frac{d_b(O_c)}{d_c(O_b)}\cdot\frac{d_a(O_b)}{d_b(O_a)} =$$

$$= \frac{r_a}{r_c}\cdot\frac{r_c}{r_b}\cdot\frac{r_b}{r_a} = 1,$$

что по теореме Чевы влечет утверждение задачи.

Второй способ. Пусть $AC \cap BO_b = K$, $CB \cap AO_a = M$, $BA \cap CO_c = N$. Проведем через O_b отрезок $A'C' \parallel AC$, где A' и C' – на прямых BA и ВС соответственно. Тогда

$$\frac{AK}{CK} = \frac{A'O_b}{C'O_b} =$$

$$= \left(\frac{r_b}{\sin\angle A} + 2r_b\right)\Big/\left(\frac{r_b}{\sin\angle C} + 4r_b\right) = \left(\frac{1}{\sin\angle A} + 2\right)\Big/\left(\frac{1}{\sin\angle C} + 4\right).$$

Аналогично выразив отношения CM/BM и BN/AN, завершаем решение, воспользовавшись теоремой Чевы.

8. Если P – параллелограмм, то нужно не менее четырех гвоздей. Действительно, если сторона s не касается никакого гвоздя, то P можно двигать в направлении двух смежных с s сторон.

Покажем теперь, что любой выпуклый многоугольник P можно зафиксировать четырьмя гвоздями.

Пусть окружность c с центром O наибольшая из окружностей, лежащих внутри P, A_1, A_2, …, A_k – точки касания c со сторонами P, H – выпуклая оболочка этих точек.

Предположим, что существуют две вершины U и V многоугольника H такие, что UV – диаметр c (рис.183). Вобьем два гвоздя в точки U и V. Очевидно, что стороны P, содержащие U и V, параллельны, следовательно, P можно двигать только в направлении, перпендикулярном UV. Чтобы зафиксировать P, достаточно вбить еще два гвоздя, препятствующих его движению влево и вправо от $\overrightarrow{UV}$.

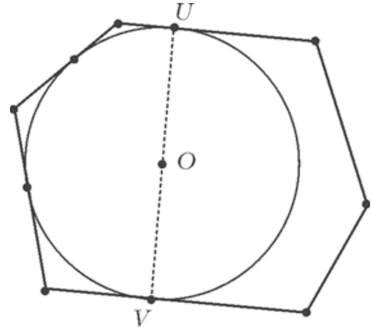


Рис. 183

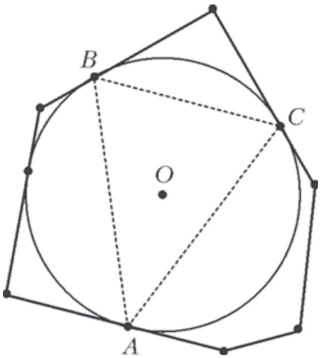


Рис. 184

Будем теперь считать, что стороны и диагонали H не содержат O.

Предположим, что $O \notin H$. Пусть PQ – сторона H, разделяющая H и O, а касательные к c в точках P и Q пересекаются в точке T. Тогда существует гомотетия с центром T и коэффициентом, большим 1, переводящая c в большую окружность, лежащую внутри P – противоречие.

Таким образом, $O \in H$. Тогда существует треугольник ABC, содержащий O (рис.184). (A, B, C – три точки касания c со сторонами P). Легко видеть, что три гвоздя, вбитые в точки A, B и C, фиксируют P.

10 класс

1. 15, 15 и 150 градусов.

Пусть $ABCD$ – квадрат, вершины X, Y, Z равнобедренного треугольника лежат на сторонах BC, CD, DA соответственно, а центр описанной окружности O треугольника XYZ лежит на AB (рис.185). Так как отрезок OY пересекает отрезок XZ, угол XYZ тупой, поэтому основанием равнобедренного треугольника является именно XZ. Тогда отрезки OY и XZ перпендикулярны. Поскольку их соответственные проекции на перпендикулярные прямые BC и AB равны, они и сами равны, т.е. сторона треугольника XYZ равна радиусу его описанной окружности.

2. *Первый способ*. Пусть отрезки AB и CW пересекаются в точке T (рис.186). Тогда $\angle ACW = \angle ABW = \angle TAW$, т.е. тре-

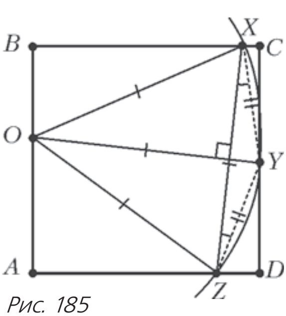


Рис. 185

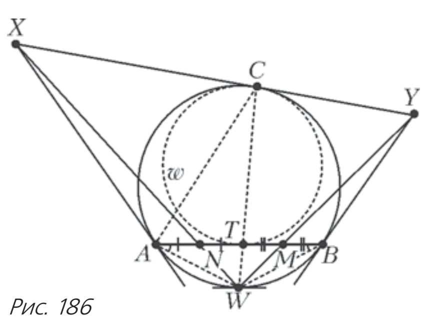


Рис. 186

гольники CAW и ATW подобны. Тогда, поскольку прямая WX – симедиана в треугольнике CAW, она является медианой в треугольника ATW, т.е. точка N – середина AT. Аналогично, точка M – середина BT, откуда $MN = AB/2$.

Второй способ. Поскольку W – середина дуги AB, касательная в ней параллельна AB. Совершим гомотетию с центром C, переводящую эту касательную в AB; пусть наша окружность при этой гомотетии переходит в окружность ω, а точка W – в точку T.

Из подобия треугольников CAW и ATW, доказанного в предыдущем способе, следует, что $AW^2 = WC \cdot WT$, т.е. W лежит на радикальной оси ω и точки A. Поскольку $XA = XC$, точка X также на ней лежит. Значит, эта радикальная ось есть WX, откуда $NA^2 = NT^2$, и N – середина AT. Аналогично, M – середина BT, откуда $MN = AB/2$.

3. Да.

Построим выпуклый многогранник с n диагоналями. При $n = 0$ годится любая пирамида.

Пусть $n > 0$. Возьмем $(n+2)$-угольную пирамиду $SA_1 \ldots A_{n+2}$. Построим вовне нее на грани $SA_{n+1}A_{n+2}$ как на основании пирамиду $TSA_{n+1}A_{n+2}$ (так, чтобы все $n + 4$ построенные вершины находились в выпуклом положении). Объединение этих двух пирамид – выпуклый многогранник $TSA_1 \ldots A_{n+2}$, диагоналями которого являются ровно отрезки $TA_1, \ldots, TA_n$.

4. 2, 3 или 4.

Очевидно, что центр O описанной окружности Ω треугольника ABC – хорошая точка, поскольку в этом случае $B_a = C_a = A$, $A_b = C_b = B$ и $A_c = B_c = C$.

Рассмотрим теперь любую хорошую точку $D \neq O$. Пусть A', B', C' – проекции D на BC, CA, AB соответственно. Точки A и A_b симметричны относительно C', также как и точки B и B_a. Значит, середины отрезков AB и A_bB_a также симметричны относительно C'; следовательно, серединный перпендикуляр к A_bB_a проходит через точку O', симметричную O относительно D (рис.187). Аналогично, серединные перпендикуляры к A_cC_a и B_cC_b также проходят через O', при этом они не параллельны; значит, O' и является центром окружности, проходящей через шесть точек.

Рис. 187

Далее, каждая из точек D и O' равноудалена от A_b и A_c; при этом $D \neq O'$, ибо $D \neq O$. Значит, прямая DO' является серединным перпендикуляром к A_bA_c. Но $B'C'$ – средняя линия в треугольнике AA_bA_c, следовательно, $DO' \perp B'C'$. Аналогично получаем, что $DO' \perp A'B'$, т.е. точки A', B' и C' лежат на одной прямой. Значит, D лежит на Ω, а $A'B'C'$ – ее прямая Симсона. Кроме того, эта прямая перпендикулярна прямой DO', т.е. радиусу DO (рис.188).

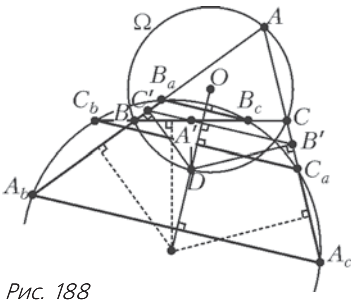


Рис. 188

Наоборот, пусть точка D окружности Ω такова, что ее прямая Симсона перпендикулярна OD. Обращая рассуждения предыдущих двух абзацев, получаем, что точка O' лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам A_bB_a, B_cC_b, A_cC_a, A_bA_c, B_aB_c и C_aC_b, т.е. все шесть точек равноудалены от O'. Значит, точка D – хорошая.

Найдем теперь количество описанных точек. Пусть точка X движется по Ω так, что угловая скорость радиуса OX постоянна. Как известно (и нетрудно показать счетом углов), прямая Симсона точки X вращается со вдвое меньшей угловой скоростью в противоположном направлении. Значит, угол между OX и этой прямой меняется с полуторной скоростью, поэтому на описанной окружности существуют три описанных точки. Добавляя центр O, получаем, что хороших точек не больше четырех.

Осталось учесть, что некоторые из них могут совпасть с вершинами. Поскольку прямая Симсона вершины A – это высота из нее, такое происходит, если радиус OA параллелен BC, т.е. $|\angle B - \angle C| = 90°$. Это может произойти и с двумя вершинами – ровно в треугольнике с углами $30°$, $30°$ и $120°$. Отсюда и следует ответ.

5. Пусть X, Y, Z – отмеченные точки. Нам требуется построить на прямых XY, YZ и ZX точки A, B и C соответственно так, чтобы в треугольнике ABC высота из A, биссектриса из B и медиана из C лежали соответственно на этих прямых.

Выберем произвольную точку B' и проведем через нее прямую l_1, перпендикулярную XY; тогда l_1 должна быть параллельна BC (рис.189). Проведем через B' прямую, параллельную YZ, и отразим l_1 относительно этой прямой; мы

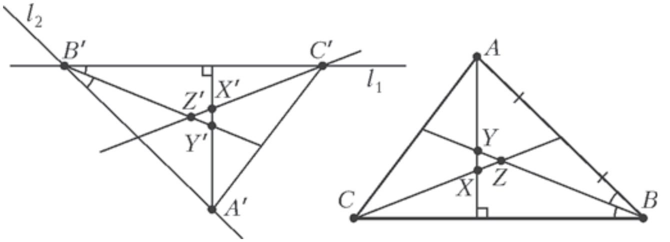


Рис. 189

получим прямую l_2, параллельную AB. На l_2 выберем произвольную точку A' и проведем через середину отрезка $A'B'$ прямую, параллельную ZX, до пересечения с l_1 в точке C'. Построенный треугольник $A'B'C'$ гомотетичен искомому (он переводится в ABC гомотетией, переводящей A' и B' в A и B соответственно; здесь мы считаем параллельный перенос частным случаем гомотетии с бесконечно удаленным центром).

Построим в этом треугольнике точки X', Y' и Z', соответствующие X, Y и Z соответственно. Из этих данных гомотетия однозначно восстанавливается, а после этого восстанавливается и исходный треугольник.

Замечание. Из решения видно, что задача имеет единственное решение, если точки X, Y и Z различны.

6. Пусть I – центр вписанной окружности ω, а J – ее точка, диаметрально противоположная C' (рис.190). Поскольку $\angle AB_1C' = \angle C'B_1J = \angle BA_1C' = \angle C'A_1J = 90°$, точки A_1 и B_1 –

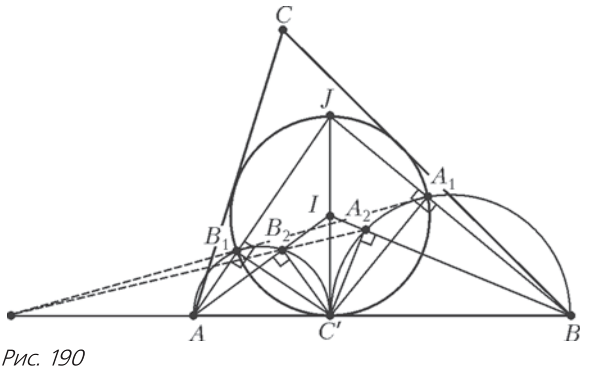


Рис. 190

это точки пересечения AJ и BJ с ω. Точки же A_2 и B_2 – это основания перпендикуляров из C' на BI и AI соответственно.

Теперь из прямоугольных треугольников $AC'I$, $BC'I$, $AC'J$ и $BC'J$ с высотами $C'B_2$, $C'A_2$, $C'B_1$ и $C'A_1$ имеем

$$\frac{AB_1}{B_1J}\cdot\frac{JA_1}{A_1B}=\frac{AC'^2}{C'J^2}\cdot\frac{JC^2}{C'B'^2}=\frac{AC'^2}{4C'I^2}\cdot\frac{4IC'^2}{C'B^2}=$$

$$=\frac{AC'^2}{C'I^2}\cdot\frac{IC'^2}{C'B^2}=\frac{AB_2}{B_2I}\cdot\frac{IA_2}{A_2B}.$$

Согласно теореме Менелая, примененной к треугольникам AIB и AJB, это означает, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекают AB в одной точке (или обе параллельны ей).

7. Будем считать, что наибольшая из площадей граней тетраэдра равна 1; обозначим эту грань через $\mathscr{F}$. Пусть S_1, S_2 и S_3 – площади остальных трех граней, а α_1, α_2 и α_3 – соответственно двугранные углы, образованные этими гранями с $\mathscr{F}$. Проектируя эти три грани на $\mathscr{F}$, получаем, что

$$S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3=1.$$

Следовательно, одно из выражений вида $S_i\cos\alpha_i$ не меньше $\frac{1}{3}$, т.е.

$$\cos\alpha_i\ge\frac{1}{3S_i}\ge\frac{1}{3}.$$

В правильном тетраэдре все три выражения равны, как и все четыре площади, так что в нем косинус двугранного угла равен $\frac{1}{3}$. Отсюда и следует требуемое.

8. Предположим, что четырехугольник $L_aL_bL_cL_d$ вписанный, но в четырехугольнике $ABCD$ нет параллельных сторон. Обозначим $P=AB\cap CD$, $Q=AD\cap BC$ и $R=AC\cap BD$ (рис.191). Далее, пусть касательные к окружности в точках A, B, C и D образуют четырехугольник $STUV$, как показано на рисунке; некоторые из точек S, T, U и V могут быть бесконечно удаленными, но точки P, Q и R таковыми не являются.

По теореме Ньютона для описанного четырехугольника $STUV$ имеем $R=SU\cap TV$. Далее, нетрудно понять, что точки L_a и L_b являются точками Лемуана треугольников BCD и BAD соответственно, поэтому $L_a=BU\cap DT$ и $L_c=BV\cap DS$. Применив теорему Паппа к шестиугольнику $BUSDTV$, получаем, что точка R лежит на прямой L_aL_c. Аналогично, точка R лежит на L_bL_d, т.е. $R=L_aL_c\cap L_bL_d$.

Обозначим также $W=ST\cap UV$ и $X=SV\cap UT$ (эти точки

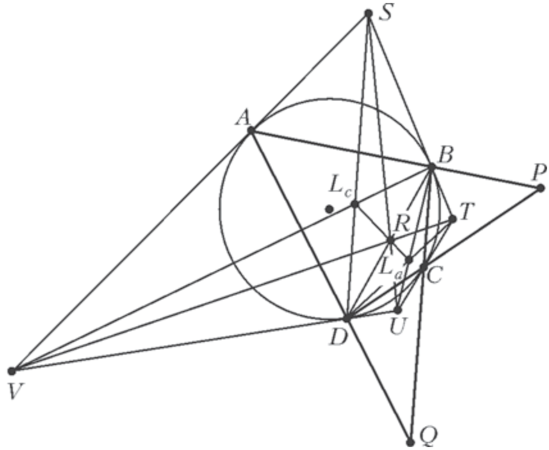


Рис. 191

могут быть бесконечно удаленными). Точно так же, применяя теорему Паппа к шестиугольникам $ATVBXW$ и аналогичным, получаем, что $P = L_aL_b \cap L_cL_d$ и $Q = L_aL_d \cap L_bL_c$.

Так как вершины треугольника PQR являются точками пересечения диагоналей и противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, вершины этого треугольника являются полюсами его сторон относительно описанной окружности k четырехугольника $ABCD$ (такая окружность называется *автополярной окружностью* треугольника PQR). По тем же причинам, описанная окружность s четырехугольника $L_aL_bL_cL_d$ также является автополярной относительно PQR. Но для треугольника может существовать максимум одна автополярная окружность. Следовательно, $k \equiv s$, что невозможно, так как точки L_a, L_b, L_c и L_d лежит внутри k.

Замечание. Покажем, что автополярная окружность может быть только одна. Если ω автополярна для треугольника PQR, O – ее центр, а r – ее радиус, то $PO \perp QR$ и $QO \perp PR$, т.е. O – ортоцентр треугольника PQR. Кроме того, $PO \cdot \rho(O, QR) = r^2$, откуда восстанавливается ее радиус.

Алексей Александрович ЗАСЛАВСКИЙ

ОЛИМПИАДЫ ИМЕНИ И.Ф.ШАРЫГИНА (2010–2014)

Библиотечка «Квант». Выпуск 134
Приложение к журналу «Квант» №2/2015

Редактор *А.Ю.Котова*
Обложка *А.Е.Пацхверия*
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская
Печать офсетная. Объем 5,25 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.
Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Тел.: 8(495)363-48-86, http://capitalpress.ru

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/
http://globalf5.com/search/founded/type/book/area/publisher/stype/extended/q/мцнмо

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru

Индекс 90064

Библиотечка КВАНТ

Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина (2010 – 2014)

ВЫПУСК

134